선형 분석법을 이용한 중성자 별의 진동 모드 분석

박경빈[1], 김진호[2]

[1]부산대학교
[2]한국천문연구원

2026년 2월 2 - 6일

문제

이번 실습의 모든 문제는 $\hat{r} = [0, 1]$ 구간을 총 1001개의 그리드 포인트(시작점과 끝점 포함)로 나누어 계산한다. 따라서 그리드 간격은 $\Delta r = 1.0 \times 10^{-3}$이다. 중성자별의 중심밀도는 명시되지 않은 경우 $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$를 사용한다.

1. 섹션 4 및 중성자별 내부 구조 을 참고하여 아래 변수에 해당하는 별의 구조를 계산하라. (배점: 10 점)

   - 폴리트로픽 상수: $K = 1.00 \times 10^2$
   - 폴리트로픽 인덱스: $n = 0.8, 1, 1.5$

   (1) CODE 출력 파일 형식 (problem1.dat))
   - 첫 번째 행: n, 수렴한 질량, 수렴한 반지름
   - 두 번째 행부터 2개의 열로 구성 - 첫 번째 열: $\hat{r}$, 두 번째 열: h

   (2) PDF 각 n에 대해 반지름에 따른 밀도를 계산한 뒤, 이를 하나의 그림에 겹쳐서 나타내라 (x-축: $\hat{r}$, y-축: ρ). 그리고 n의 변화에 따라 나타나는 경향성을 분석하여 기술하라.

   (3) PDF ($n = 0.8, K = 500$), ($n = 1, K = 50$), ($n = 1.5, K = 5.0$)의 3개의 상태방정식에 대해 ρ_c를 바꿔가며 질량과 반지름을 계산한 뒤, 질량-반지름 곡선를 그려라 (x-축: R_s, y-축: M).
   ρ_c의 범위는 별의 표면에서의 탈출속도가 광속을 넘어가는 지점까지로 한다.

2. 섹션 4 방사형 진동 을 참고하여 아래 변수에 해당하는 별에서 방사형 진동의 기본 진동 모드 및 1–2차 배음 모드를 계산하라. (배점: 15 점)

   - 폴리트로픽 상수: $K = 3.00$
   - 폴리트로픽 인덱스: $n = \sqrt{3}$

   (1) PDF 임의의 n에 대하여 연속 방정식, 오일러 방정식과 상태방정식에 섭동을 가한 뒤, ξ_r와 δh에 대하여 정리하라(최종적으로 2개의 식이 나와야한다).

   (2) CODE 출력 파일 형식 (problem2.dat))
   - 첫 번째 행: 배경 별의 질량, 배경 별의 반지름, 수렴한 진동 모드의 각진동수 ω
   - 두 번째 행부터 2개의 열로 구성 - 첫 번째 열: $\hat{r}$, 두 번째 열: $\hat{\xi}$, 세 번째 열: δh

(3) PDF $\hat{\xi}$와 δh에 대해 각각 하나의 그림을 작성하여 제출 (총 두 개의 그림).

- $\hat{\xi}$ 그림: 기본 진동 모드 및 1–2차 배음 모드를 하나의 그래프에 겹쳐서 표시 (x-축: $\hat{r}$, y-축: $\hat{\xi}$)
- δh 그림: 기본 진동 모드 및 1–2차 배음 모드를 하나의 그래프에 겹쳐서 표시 (x-축: $\hat{r}$, y-축: δh)

3. 섹션 4, 비방사형 진동 을 참고하여 아래 변수에 해당하는 별에서 $l = 2$ 에 대응되는 비방사형 진동의 기본 진동 모드와 1-2차 배음 모드를 계산하라. (배점: 15 점)

- 폴리트로픽 상수: $K = 3.00$
- 폴리트로픽 인덱스: $n = \sqrt{3}$

(1) CODE 출력 파일 형식 (problem3.dat))
- 첫 번째 행: 배경 별의 질량, 배경 별의 반지름, 수렴한 진동 모드의 각진동수 ω
- 두 번째 행부터 2개의 열로 구성 - 첫 번째 열: $\hat{r}$, 두 번째 열: $\hat{\xi}$, 세 번째 열: $\delta\hat{h}$

(2) PDF 반지름에 따른 $\hat{\xi}$와 $\delta\hat{h}$에 대해 세 가지 진동 모드를 겹쳐서 그려라 (x-축: $\hat{r}$, y-축: $\hat{\xi}$ or $\delta\hat{h}$, 각 변수별 그림 1개씩).

(3) 제공된 시각화 코드를 이용하여 비방사형 모드가 시간에 따라 어떻게 진동하는지 살펴보고 이를 통해 비방사형 진동에 대해 더욱 깊게 이해하자 (답안 제출 불필요).

(4) CODE PDF 섹션 6을 참고하여 우리은하 내 지구와 1 kpc 떨어져 있는 중성자별 표면에서 1 cm만큼 변화($\xi = 1$ cm)가 발생 하였다고 가정하자. 이때 ${}^2f$와 ${}^2p_1$ 모드에서 나오는 중력파의 크기를 추정하라($m = 0, 1, 2$). ${}^2f$는 $l = 2$에 해당하는 진동 중 기본 진동모드를 의미하고 ${}^2p_1$는 $l = 2$에 해당하는 진동 중 1차 배음모드에 해당한다.

4. 섹션 5을 참고하여 일반상대론에서 아래 변수에 해당하는 별의 구조를 찾아내라. (배점: 15 점)

- 폴리트로픽 상수: $K = 1.00 \times 10^2$
- 폴리트로픽 인덱스: $n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}$

(1) CODE 출력 파일 형식 (problem4.dat))
- 첫 번째 행: n, 별의 질량, 수렴한 반지름, 수렴한 Λ의 표면값, 수렴한 Φ의 중심값
- 두 번째 행부터 4개의 열로 구성 - 첫 번째 열: $\hat{r}$, 두 번째 열: Λ, 세 번째 열: Φ, 네 번째 열: h

(2) PDF 각 n에 대해 반지름에 따른 Λ, Φ, ρ를 계산한 뒤 겹쳐서 그리고 (x-축: $\hat{r}$, y-축: Λ, Φ, ρ, 각 변수별 그림 1개씩), n이 변화함에 따라 어떠한 경향성을 갖는지 설명하라.

(3) PDF ($n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, K = 1000$), ($n = 1, K = 50$), ($n = \sqrt{2}, K = 5$)의 3개의 상태방정식에 대해 ρ_c를 바꿔가며 질량과 반지름을 계산한 뒤, 중심밀도-질량 (x-축: ρ_c, y-축: M), 중심밀도-반지름 (x-축: ρ_c, y-축: R_s), 질량-반지름 (x-축: R_s, y-축: M) 곡선를 그려라.

(4) PDF 각각의 n에 대하여 중성자별이 가질 수 있는 최대 질량과 최대 질량을 가질 때의 중심 밀도를 구하라. 중심밀도-질량 데이터에서 중성자별이 최대질량에서 $\frac{dM}{d\rho_c} = 0$이라는 것을 활용하여 최대질량을 구한다.

5. (도전) 섹션 5, 내부구조 와 방사형 진동 을 참고하여 아래 변수에 해당하는 별에서 Cowling근사를 사용하여 방사형 진동의 기본 진동 모드와 1-2차 배음 모드를 계산하라. (배점: 20 점)

- 폴리트로픽 상수: $K = 1.00$

- 폴리트로픽 인덱스: $n = \sqrt[3]{10}$

(1) CODE 출력 파일 형식 (problem5.dat)
- 첫 번째 행: 배경 별의 질량, 배경 별의 반지름, 수렴한 진동 모드의 각진동수 ω
- 두 번째 행부터 2개의 열로 구성 - 첫 번째 열: $\hat{r}$, 두 번째 열: $\hat{\xi}$, 세 번째 열: δh

(2) PDF 반지름에 따른 $\hat{\xi}$와 δh에 대해 세 가지 진동 모드를 겹쳐서 그려라 (x-축: $\hat{r}$, y-축: $\hat{\xi}$ or δh, 각 변수별 그림 1개씩).

(3) PDF ($n = \sqrt{2}, K = 5$)의 상태방정식에 대해 중심밀도에 따른 ω^2을 계산하여 그려라 (x-축: ρ_c, y-축: ω^2). 중심밀도-ω^2 관계식에서 어떤 경향성을 찾을 수 있고 이러한 경향성이 나오는 이유에 대하여 서술하라.

6. (도전) 섹션 5, 방사형 진동 을 참고하여 아래 변수에 해당하는 별에서 Cowling근사를 사용하지 않고 방사형 진동의 기본 진동 모드와 1-2차 배음 모드를 계산하시오. (배점: 20 점)

- 폴리트로픽 상수: $K = 1.00$
- 폴리트로픽 인덱스: $n = \sqrt[3]{10}$

(1) CODE 출력 파일 형식 (problem6.dat)
- 첫 번째 행: 배경 별의 질량, 배경 별의 반지름, 수렴한 진동 모드의 각진동수의 제곱 ω^2
- 두 번째 행부터 2개의 열로 구성 - 첫 번째 열: $\hat{r}$, 두 번째 열: $\hat{\xi}$, 세 번째 열: δh

(2) PDF 반지름에 따른 $\hat{\xi}$와 δh에 대해 세 가지 진동 모드를 겹쳐서 그려라 (x-축: $\hat{r}$, y-축: $\hat{\xi}$ or δh, 각 변수별 그림 1개씩).

(3) PDF ($n = \sqrt{2}, K = 5$)의 상태방정식에 대해 ρ_c-ω^2 관계(x-축: ρ_c, y-축: ω^2)를 그려보고 문제 5에서 구한 ρ_c-ω^2 관계와 비교하라. 또한 문제 4에서 구한 중심밀도-질량, 중심밀도-반지름, 질량-반지름 관계 그림에서 $\omega^2 \geq 0$ 부분과 $\omega^2 < 0$ 부분을 다른 색으로 표시하고 각각의 색이 무엇을 의미하는지 서술하라.

제출방식

- 문제 풀이에 대한 답안을 하나의 PDF 파일로 작성하여 마감시간(2월 5일 16:00)까지 이메일로 제출.
  nrgw.loc@gmail.com
- 풀이에 사용한 수치 코드는 압축 파일 형태로 함께 제출하며, 컴파일 명령어, 컴파일 옵션 및 실행 방법을 정답지에 반드시 기술할 것.
- .dat 파일은 용량이 매우 커지게 되므로 제출하지 말것. 코드 실행시 파일이 생기도록 코드를 작성하라는 의미임.
- 각 소문제별로 PDF 와 CODE 배지가 붙어 있다. PDF 가 붙은 문제는 결과 그림을 pdf파일에 넣고, CODE 가 붙은 문제는 실행시 주어진 출력이 나오는 수치 계산 코드를 제출한다.

주의사항

- 답안 제출 시 메일 제목에 팀명이 반드시 드러나도록 표기할 것.
  예: 문제 풀이 답안 (팀명: 포기하지마)
- 생성형 AI를 사용한 경우, 사용한 부분과 범위를 정답지에 명확히 기술해야 함.

설명자료

1 문제 출제의 취지

중력파 파원은 방출되는 신호의 특성에 따라 크게 네 가지로 분류된다. 첫째, 블랙홀이나 중성자별과 같은 밀집천체 쌍성이 서로를 공전하다 병합하는 과정에서 방출되는 밀집쌍성병합(Compact Binary Coalescence, CBC) 신호로, 현재까지 관측된 중력파 신호의 대부분을 차지한다. 둘째, 초신성 폭발과 같이 격렬한 천문현상에서 짧은 시간 동안 폭발적으로 방출되는 폭발형(burst) 신호가 있다. 셋째, 매우 오랜 시간에 걸쳐 거의 일정한 주파수와 세기로 지속적으로 방출되는 연속형(continuous) 신호가 있으며, 마지막으로 초기 우주의 중력파와 같이 다양한 주파수와 세기를 가진 다수의 파원들이 중첩되어 배경 잡음처럼 관측되는 스토캐스틱형(stochastic) 신호가 있다.

이 중 연속형 중력파 신호의 가장 유력한 방출 천체는 빠르게 회전하는 중성자별(Neutron Star)이다. 우리 은하 내에 존재하는 중성자별들은 극도로 높은 밀도를 유지한 채 초당 수백에서 수천 회에 이르는 빠른 회전을 하고 있으나, 단순히 무거운 중성자별이 빠르게 회전하는 것만으로는 연속적인 중력파가 발생하지 않는다. 만약 중성자별이 회전축을 기준으로 질량 분포가 완전히 대칭인 축대칭(axial symmetry)을 유지한다면, 회전 과정에서 사중극자 모멘트(quadrupole moment)가 시간에 따라 변화하지 않기 때문에 중력파는 방출되지 않는다.

따라서 중성자별에서 연속적인 중력파가 방출되기 위해서는 이러한 축대칭성을 깨뜨리는 물리적 요인이 필요하다. 이를 설명하기 위한 여러 이론적 모델들이 제안되어 왔으며, 그중 대표적인 예가 별 내부 유체의 운동에 의해 유도되는 비방사형 진동(non-radial oscillation)이다.

이번 2026 수치상대론 및 중력파 겨울학교 / 계산 천체물리 경진대회에서는 중성자별의 내부 구조를 이해하기 위한 평형 해를 계산하고, 방사형(radial) 및 비방사형(non-radial) 진동 모드를 수치적으로 분석함으로써 연속 중력파의 방출 과정과 해당 중력파 파원의 물리적 성질을 탐구하는 것을 목표로 한다. 이를 통해 참가자들은 중성자별 진동과 중력파 물리의 핵심 개념을 수치 계산을 통해 직접 이해하고 분석하는 경험을 얻게 될 것이다.

2 사용 단위

상대론과 천체물리학에서 자주 등장하는 상수인 중력상수 $G = 6.674 \times 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\,g^{-1}\,s^{-2}}$와 $c = 2.998 \times 10^{10}\mathrm{cm\,s^{-1}}$는 일반적으로 사용하는 mks단위계나 cgs단위계에서 매우 크거나 매우 작은 값을 가진다. 이런 매우 크거나 작은 수를 이용한 연산의 불편함을 해소하기 위해서 본 실습에서는 $G = c = 1$인 단위계를 사용하고자 한다. 이러한 단위계를 자연 단위계(Natural Units)이라고 한다. 그리고 $G = c = 1$으로는 모든 단위가 결정되지 않아 추가적으로 $1M_\odot(1.989 \times 10^{33}\mathrm{g}) = 1$로 잡아서 더욱 간편하게 사용하고자 한다. G, c, $1M_\odot$는 모두 1이므로 아래와 같은 단위변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} GM_\odot/c^2 &= 1 && \text{(Natural units)} \\ &= 1476.5234\,\mathrm{m} && \text{(SI units)} \end{aligned} \tag{1}$$

즉,

$$
\begin{aligned}
1\,\mathrm{m} &= 1\,\mathrm{m} \times 1 \\
&= 1\,\mathrm{m} \times \frac{1}{GM_\odot/c^2} \\
&= 1\,\mathrm{m} \times \frac{1}{1476.5234\,\mathrm{m}} \\
&= 0.000677267 \qquad \text{(Natural units)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

따라서 중성자별의 반지름이 SI 단위계에서 $R = 10\,\mathrm{km}$일 때, 이를 자연단위계로 변환하면 $R = 6.77267$이 된다.

자연단위	정의	cgs 단위 값
$1\,L$ (길이)	$GM_\odot/c^2$	1.477×10^5 cm
$1\,T$ (시간)	$GM_\odot/c^3$	4.925×10^{-6} s
$1\,M$ (질량)	$M_\odot$	1.988×10^{33} g
$1\,\rho$ (밀도)	$M_\odot/(GM_\odot/c^2)^3$	6.180×10^{16} g cm^{-3}
$1\,f$ (주파수)	$(GM_\odot/c^3)^{-1}$	2.030×10^2 kHz

표 1: 자연단위계($G = c = M_\odot = 1$)에서의 기본 물리량과 CGS 단위 변환 (모든 수치는 유효숫자 4자리로 표기)

3 상태방정식과 폴리트로프 근사

상태방정식의 의미

상태방정식(equation of state, EOS)은 물질의 거시적 상태를 기술하는 기본적인 관계식으로, 일반적으로 압력 P, 밀도 ρ, 온도 T 사이의 관계를 규정한다. 별 내부 구조 문제에서 상태방정식은 주어진 밀도에서 물질이 얼마만큼의 압력을 생성할 수 있는지를 결정하며, 이는 중력에 대항하여 별이 평형을 유지할 수 있는지를 좌우한다.

별의 구조는 중력에 의한 수축과 압력에 의한 팽창 사이의 균형으로 결정되므로, 상태방정식은 별의 질량, 반지름, 밀도 분포를 결정하는 핵심적인 입력 물리량이다. 특히 정역학적 평형 방정식에서 압력 구배는 상태방정식을 통해 밀도 분포와 직접적으로 연결된다.

축퇴 천체에서의 상태방정식

주계열성과 달리, 백색왜성과 중성자별과 같은 축퇴 천체에서는 온도에 의한 열압이 거의 중요하지 않다. 대신 이들 천체의 압력은 주로 페르미 입자의 축퇴압(degeneracy pressure)에 의해 지배되며, 이 압력은 온도와 무관하게 밀도의 함수로 주어진다. 따라서 축퇴 천체에서는 상태방정식이 사실상

$$P = P(\rho)$$

의 형태로 단순화된다. 이와 같이 압력이 밀도의 함수로만 주어지는 경우를 바로트로픽 상태방정식 (barotropic equation of state)이라 하며, 이 가정은 이후 엔탈피 변수를 도입하는 데 핵심적인 역할을 한다.

백색왜성의 경우 전자 축퇴압이 압력을 지배하며, 중성자별의 경우에는 중성자 축퇴압과 강한 핵력에 의한 상호작용이 중요한 역할을 한다. 이로 인해 상태방정식의 형태는 별의 구조를 결정하는 가장 중요한 요소가 된다.

폴리트로프 상태방정식 근사

실제 백색왜성과 중성자별의 상태방정식은 미시적인 상호작용과 상대론적 효과를 포함해야 하므로 매우 복잡하다. 그러나 별의 거시적 구조와 기본적인 물리적 성질을 이해하기 위한 첫 단계로서, 이러한 복잡한 상태방정식을 단순한 함수형으로 근사하는 것이 유용하다.

본 실습에서는 상태방정식으로 다음과 같은 폴리트로프(polytrope) 근사를 사용한다.

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{3}$$

여기서 K는 폴리트로픽 상수(polytropic constant), n은 폴리트로픽 인덱스(polytropic index)이다. 폴리트로픽 인덱스 n은 물질의 압축 가능성, 즉 상태방정식의 단단함(stiffness)을 정성적으로 반영한다.

실습에서 단일 폴리트로프를 사용하는 이유

중성자별의 실제 상태방정식은 밀도에 따라 그 성질이 크게 변화하므로, 하나의 단순한 함수로 정확히 표현하기는 어렵다. 그럼에도 불구하고 단일 폴리트로프 모델은 중력과 압력 사이의 경쟁이라는 핵심 물리를 가장 단순한 형태로 드러내며, 별의 구조가 상태방정식에 어떻게 의존하는지를 직관적으로 이해할 수 있게 해준다.

본 실습의 목적은 중성자별의 실제 상태방정식을 정밀하게 재현하는 것이 아니라, 평형 상태에 있는 별의 구조와 그 위에서 정의되는 진동 모드의 기본적인 물리적 성질을 이해하는 데 있다. 이를 위해 계산의 단순성과 물리적 해석의 명확성을 우선하여, 본 실습에서는 하나의 폴리트로프 상태방정식만을 사용하여 평형 상태의 중성자별 구조를 계산한다.

엔탈피와 바로트로픽 상태방정식

엔탈피(enthalpy) h는 단위 질량당 엔탈피(specific enthalpy)로 정의되며, 열역학적으로

$$h \equiv u + \frac{P}{\rho} \tag{4}$$

로 주어진다. 여기서 u는 단위 질량당 내부에너지, P는 압력, ρ는 질량 밀도이다.

열역학 제1법칙으로부터 엔탈피의 미분형은

$$dh = T\,ds + \frac{1}{\rho}dP \tag{5}$$

로 주어지며, 축퇴 천체와 같이 바로트로픽 상태방정식

$$P = P(\rho)$$

을 만족하고 엔트로피가 공간적으로 일정한 경우에는

$$dh = \frac{1}{\rho}dP \tag{6}$$

로 단순화된다.

따라서 엔탈피는 압력의 함수로 정의되는 유효 변수로 해석할 수 있으며, 정역학적 평형 방정식을 간결하게 표현하는 데 유용하다.

폴리트로프 상태방정식에서의 엔탈피

본 실습에서는 상태방정식으로 다음과 같은 폴리트로프(polytrope) 근사를 사용한다.

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{7}$$

여기서 K는 폴리트로픽 상수(polytropic constant), n은 폴리트로픽 인덱스(polytropic index)이다.

폴리트로프 상태방정식에 대해 엔탈피는 식 (6)에 의해

$$h = \int \frac{1}{\rho}\, dP \tag{8}$$

이므로, 이를 적분하면

$$\begin{aligned} h &= \int \frac{1}{\rho}\left(K\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho^{\frac{1}{n}} d\rho\right) \\ &= K(n+1)\rho^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \tag{9}$$

를 얻는다.

일반상대론에서는 정지질량 자체가 에너지를 가지므로, 에너지 밀도에 정지질량 에너지가 포함된다. 이로 인해 상대론적 단위질량당 엔탈피는

$$h = 1 + K(n+1)\rho^{\frac{1}{n}} \tag{10}$$

의 형태로 쓸 수 있으며, 여기서 앞의 상수항 1은 정지질량 에너지에 해당한다.

이 결과는 폴리트로프 모델에서 엔탈피가 밀도의 단순한 거듭제곱 함수로 표현됨을 보여주며, 별의 구조 방정식을 해석적으로 다루는 데 큰 이점을 제공한다.

4 뉴턴 역학에서 별 구조 및 진동

중성자별 내부 구조

중성자별 속에 존재하는 진동 모드들을 구하기 위해서는 별의 구조를 알아야하므로 평형상태에 있는 별의 구조를 계산해보자. 별은 안쪽으로 수축하려는 중력과 바깥쪽으로 팽창하려는 압력이 균형을 이루어 평형상태를 유지한다 (정역학적 평형, Hydrostatic equilibrium). 주계열성의 경우 핵융합을 통한 온도와 복사를 통해 팽창하려는 압력을 만들어내고, 백색왜성이나 중성자별의 경우 전자와 중성자의 축퇴압(degeneracy pressure) 그리고 다양한 양자역학적 효과를 통해 압력을 만들어 낸다. 뉴턴 역학에서 정역학적 평형식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{11}$$

여기서 Φ는 중력 퍼텐셜(gravitaional potential)이고, 이 식을 엔탈피의 정의(식 6)를 이용하면 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr}. \tag{12}$$

그리고 중력 포텐셜은 푸아송 방정식(Poisson equation, $\nabla^2\Phi = 4\pi\rho$)을 통해 기술 할 수 있다. 여기서 별이 구대칭이라고 가정을 하면 r방향으로 계산만 하면 된다. 구 대칭 별에 대한 중력 포텐셜은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 4\pi\left(\frac{h}{K(n+1)}\right)^n \tag{13}$$

그럼 식 (13), (12) 이용하여 별 내부의 중력 퍼텐셜과 엔탈피를 계산할 수 있고, 다시 엔탈피를 이용하여 밀도와 압력을 계산할 수 있다. 수치계산에 용이하게 만들기 위해 무차원의 새로운 좌표계 $\hat{r} = \frac{r}{R_s}$(R_s는 별의 반지름)를 도입하자. 위와 같은 새로운 좌표를 도입하면 별의 중심이 $\hat{r} = 0$이고, 별의 표면이 $\hat{r} = 1$로 정규화된다. 새로운 좌표계로 위 두 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{d\hat{r}} &= -\frac{d\Phi}{d\hat{r}} \\ \frac{d^2\Phi}{d\hat{r}^2} &= -\frac{2}{\hat{r}}\frac{d\Phi}{d\hat{r}} + 4\pi R_s^2\left(\frac{h}{K\,(n+1)}\right)^n\end{aligned} \tag{14}$$

이 두 식을 이용하여 별의 중심($\hat{r} = 0$)과 별의 표면($\hat{r} = 1$)에서 별의 내부($\hat{r} = 0.5$)를 향해 h와 $\frac{d\Phi}{d\hat{r}}$을 계산한다.

전미분 방정식 식 (14)을 풀기 위해서는 별의 중심($\hat{r} = 0$)과 별의 표면($\hat{r} = 1$)에서 두 변수 (h, Φ')의 값과 미분값이 필요하다. 별의 중심($\hat{r} = 0$)에서 경계조건은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}&\text{(i)} \quad h(\hat{r}=0) &&= K\,(n+1)\,\rho_c^{\frac{1}{n}} \\ &\text{(ii)} \quad \left.\frac{dh}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} &&= 0 \\ &\text{(iii)} \quad \left.\frac{d\Phi}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} &&= 0 \\ &\text{(iv)} \quad \left.\frac{d^2\Phi}{d\hat{r}^2}\right|_{\hat{r}=0} &&= \frac{4}{3}\pi\rho_c R_s^2\end{aligned} \tag{15}$$

(i) 별의 중심 밀도가 주어진 상황에서 질량과 반지름을 구할 것이므로 중심 밀도를 통해 중심에서의 엔탈피를 계산할 수 있다.

(ii), (iii) 대칭성 통해 별의 중심에서 힘을 받지 않는다는 것을 알 수 있다.

(iv) 별의 중심에서 로피탈 정리를 이용하여 경계조건을 찾았다 ($\frac{1}{\hat{r}}\frac{d\Phi}{d\hat{r}} = \frac{d^2\Phi}{d\hat{r}^2}$).

별의 표면($\hat{r} = 1$)에서는 엔탈피가 0이 되는 지점이 된다. 이 경우 특별히 발산하는 성분이 없기에 경계조건을 쉽게 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\text{(i)} \quad h(\hat{r}=1) &&= 0 \\ &\text{(ii)} \quad \left.\frac{dh}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= -\frac{M}{R_s} \\ &\text{(iii)} \quad \left.\frac{d\Phi}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= \frac{M}{R_s} \\ &\text{(iv)} \quad \left.\frac{d^2\Phi}{d\hat{r}^2}\right|_{\hat{r}=1} &&= -\frac{2M}{R_s}\end{aligned} \tag{16}$$

(i) 표면에서 밀도는 0이기 때문에 엔탈피도 0이 된다.

(ii), (iii) 별 외부에서 중력퍼텐셜은 단순히 $\Phi = -\frac{M}{r} = -\frac{M}{R_s}\frac{1}{\hat{r}}$로 주어진다. 그리고 중력퍼텐셜과 중력퍼텐셜의 일차미분값은 별의 표면에서 연속이여야하므로 $\frac{d\Phi}{d\hat{r}} = \frac{M}{R_s}\frac{1}{\hat{r}^2}$이다.

(iv) 푸아송 방정식을 통해 구할 수 있다.

그림 1: 고정된 좌표계에서 유체를 관찰하는 오일러의 관점과, 유체를 따라 이동하며 유체를 관찰하는 라그랑주의 관점[1].

섭동 방정식

유체를 기술하는 관점은 2가지가 존재한다. 오일러 관점은 정지한 관찰자에 의해 기술 되는 방식을 의미하고, 라그랑주 관점은 유체의 흐름에 따라 움직이는 관찰자에 의한 관점이다(그림 1). 오일러의 관점에서는 유체의 물리량을 공간 좌표 $\boldsymbol{r}$과 시간 t의 함수로 둔다.

$$\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) \tag{17}$$

즉, "[특정 위치]에서 시간이 흐르며 물리량이 어떻게 변하는가?"를 나타내낸다. 반면, 라그랑주의 관점에서는 특정 유체 덩어리를 초기 위치 $\boldsymbol{r}_0$로 라벨링하고, 그 유체의 궤적을 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0, t)$로 나타낸다. 속도 또한 라벨을 고정한 채로 위치를 시간으로 미분하여 얻는다.

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t) = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{\boldsymbol{r}_0} \tag{18}$$

두 관점을 잇는 연결고리는 유체 덩어리를 따라가며 본 시간 변화율이다. 임의의 물리량(ϕ)에 대해 두 관점에서의 미분은 아래와 같은 관계식 갖는다.

$$\frac{d\phi}{dr} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{\boldsymbol{r}} + \nabla\phi \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\phi \tag{19}$$

여기서, $\partial/\partial t$는 공간의 고정된 위치에 대한 local time derivative이고, d/dt는 유체를 따라가는 시간 미분인 material time derivative이다.

이제, 평형 상태의 유체에 작은 섭동(perturbation)이 생기는 상황을 생각해보자. 유체에 생기는 섭동 또한 앞서 본 두 가지 관점으로 나누어 볼 수 있다. 오일러리안 섭동($\delta\phi$)은 공간의"특정 위치"에서 물리량이 얼마나 바뀌었는지, 라그랑지안 섭동($\Delta\phi$)는 특정 유체 덩어리를 따라가면서"해당 입자"가 가지는 물리량이 얼마나 바뀌었는지를 나타낸다. 수식적으로 두 섭동은 아래와 같은 방식으로 정의한다.

$$\delta\phi(\boldsymbol{r},t) \equiv \phi(\boldsymbol{r},t) - \phi_0(\boldsymbol{r}) \tag{20}$$

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r},t) \equiv \phi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\xi},t) - \phi_0(\boldsymbol{r}) \tag{21}$$

그리고 섭동의 크기가 매우 작다고 가정하면($|\xi| \ll 1$), 두 섭동은 섭동의 일차 오더에서 아래와 같은 관계식을 가진다.

$$\phi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\xi},t) \simeq \phi(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{22}$$

섭동의 일차 오더에서 $\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\phi \simeq \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\phi_0$이므로

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \phi(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) - \phi_0(\boldsymbol{r}) \\ &\simeq [\phi(\boldsymbol{r},t) - \phi_0(\boldsymbol{r})] + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) \\ &= \delta\phi + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{23}$$

또한, 평형상태에서 유체들이 정지해있다고 가정하면($\boldsymbol{v}_0 = 0$),

$$\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t} \tag{24}$$

유체의 움직임을 기술하는 2가지 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{25}$$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla P + \rho\nabla\Phi = 0 \tag{26}$$

첫 번째 식은 연속방정식(continuity equation)이고 두 번째 방정식은 오일러 방정식(Euler equation)이다. 여기에 섭동을 넣어보자. 연속방정식에 섭동을 넣으면 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\delta\rho) + \nabla\cdot\{(\rho_0+\delta\rho)(v_0+\delta v)\} \\ &= \frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v_0 + \delta\rho v_0 + \rho_0\delta v + \delta\rho\delta v) \\ &\simeq \frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v_0 + \delta\rho v_0 + \rho_0\delta v) \\ &= \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0\delta v) \\ &= \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho + \nabla\cdot(\rho_0\xi)) \\ 0 &= \delta\rho + \nabla\cdot(\rho_0\xi)\end{aligned} \tag{27}$$

세 번째 등식은 섭동의 일차항까지만 고려한 것이고, 네 번째 등식은 회전하지 않고 정지한 별($v_0 = 0$)이라는 점과, 연속방정식에 의해 정리된다.

또한, 별 내부에 추가적인 에너지 생성원이 없다고 가정하고 상태방정식($P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$)에 섭동을 취하면 압력의 섭동과 밀도의 섭동간의 관계식을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
P_0 + \delta P &= K\left(\rho_0 + \delta\rho\right)^{1+\frac{1}{n}} \\
&= K\rho_0^{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\
&\simeq K\rho_0^{1+\frac{1}{n}}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) \\
&= K\rho_0^{1+\frac{1}{n}} + K\rho_0^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\delta\rho \\
\rightarrow \delta P &= K\rho_0^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\delta\rho
\end{aligned}
\tag{28}
$$

세번째 줄의 근사식은 Taylor 전개를 통해 얻을 수 있다. 마찬가지의 방법으로 오일러 방정식과 엔탈피-밀도 관계식에 섭동을 넣고, radial방향과 tangential방향으로 식을 나눈다.

그리고 섭동의 해가 시간에 따라 조화진동을 하고, 공간의 세 변수들이 분리되어 있는 해를 상정하자. 즉, 다음과 같은 ansatz를 가정하자.

$$
\begin{aligned}
\vec{\xi}(r,\theta,\phi,t) &= \xi_r(r)X(\theta)Y(\phi)\mathrm{exp}(-i\omega t) \\
&\quad + \xi_h(r)W(\theta)Z(\phi)\mathrm{exp}(-i\omega t) \\
\delta h(r,\theta,\phi,t) &= \delta h_r(r)P(\theta)Q(\phi)\mathrm{exp}(-i\omega t)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

오일러 방정식에 섭동을 추가하는 과정에서 우리는 tangential방향의 해가 구면 조화 함수(spherical harmonics)임을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\vec{\xi}(r,\theta,\phi,t) &= \xi_r(r)Y_m^l(\theta,\phi)\,\vec{r}\,\mathrm{exp}(-i\omega t) \\
&\quad + \xi_h(r)\left(\frac{\partial Y_m^l}{\partial\theta}\vec{\theta} + \frac{1}{\mathrm{sin}\theta}\frac{\partial Y_m^l}{\partial\phi}\vec{\phi}\right)\mathrm{exp}(-i\omega t) \\
\delta h(r,\theta,\phi,t) &= \delta h_r(r)Y_m^l(\theta,\phi)\mathrm{exp}(-i\omega t)
\end{aligned}
\tag{30}
$$

위 식 (9), (26), (27), (28), (30)을 이용하여 오일러 방정식에 섭동을 추가한 뒤, 변위의 섭동(ξ)과 엔탈피의 섭동(δh)에 대하여 정리한다.

* hint : 구면 조화 함수($Y_l^m(\theta,\phi)$)는 horizontal Laplacian ∇_h^2의 고유함수로 ∇_h^2연산을 취하면 $-\frac{l(l+1)}{r^2}$의 고유값을 갖는다. 즉,

$$
\nabla_h^2 Y_l^m(\theta,\phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_l^m(\theta,\phi) \tag{31}
$$

여기서 ∇_h^2는 아래와 같이 정의된다.

$$
\nabla_h^2 f \equiv \frac{1}{r^2\mathrm{sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sin}\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sin}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\phi} \tag{32}
$$

정리한 식에서 $\delta\Phi$는 유체의 움직임에 비교적 적은 영향을 주는 반면 해를 구하기 어렵게 만든다. 그래서 $\delta\Phi \simeq 0$로 근사하고 이것을 Cowling 근사라고 한다. 본 섹션에서는 Cowling 근사를 적용한 식을 사용한다.

방사형 진동

방사형 진동은 유체의 변위의 섭동이 단순히 r방향으로만 움직여서 별이 구 대칭성(spherical symmetry)을 유지한 채 수축과 팽창을 반복하는 진동이다. 이는 구면 조화 함수의 차수가 0에 해당하므로($l=0$) 앞서 구한 섭동식에 $l=0$를 대입하

여 사용한다.

이 식을 통해 ξ와 δh를 구하여 별의 진동 모드를 기술하기 위해서는 ω를 알아야한다. 방사형 진동의 경우 ξ가 별의 중심에서 $\hat{r}$에 비례한다는 것이 알려져 있다. 따라서 ξ가 중심에서 0이 되므로 아래와 같은 새로운 변수를 정의하자.

$$\hat{\xi} = \frac{\xi}{\hat{r}} \tag{33}$$

앞서 구한 섭동이 가해진 식들을 $\hat{\xi}$에 대해서 정리하여 계산하라.

별의 중심$(\hat{r} = 0)$에서 경계조건은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \hat{\xi}(\hat{r}=0) &&= 1 \\
&\text{(ii)} \quad \left.\frac{d\hat{\xi}}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} &&= 0 \\
&\text{(iii)} \quad \delta h(\hat{r}=0) &&= -3\frac{h_0}{nR_s}\hat{\xi} \\
&\text{(iv)} \quad \left.\frac{d\delta h}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} &&= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

(i) $\xi(\hat{\xi})$는 선형 해이기 때문에 임의의 상수를 곱하여도 방정식을 만족하는 해이다. 따라서 우리는 $\hat{\xi} = 1$로 설정한다.
(ii) 대칭성 (iii) 섭동된 연속방정식 (iv) 섭동된 오일러 방정식을 통해 알 수 있다.

별의 표면$(\hat{r} = 1)$에서 경계조건은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \hat{\xi}(\hat{r}=1) &&= 1 \\
&\text{(ii)} \quad \left.\frac{d\hat{\xi}}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= -\frac{1}{n+1}\frac{1}{\frac{dh_0}{dr}}\left[3\frac{dh_0}{dr}\frac{\hat{\xi}}{\hat{r}} + nR_s^2\omega^2 + n\frac{d^2h_0}{dr^2}\hat{\xi}\right] \\
&\text{(iii)} \quad \delta h(\hat{r}=1) &&= -\frac{1}{R_s}\frac{dh_0}{d\hat{r}}\hat{\xi} \\
&\text{(iv)} \quad \left.\frac{d\delta h}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= R_s\omega^2\hat{\xi}
\end{aligned} \tag{35}$$

(i) 별의 중심에서와 마찬가지로 ξ에 임의의 상수를 곱하는 것이 가능하여, 우리는 $\hat{\xi}$가 표면에서 1이 되게끔 설정한다.
(ii), 섭동된 연속 방정식을 통해 구할 수 있다. 특히 $\frac{\Delta h}{h_0} = \frac{\frac{R_s}{\hat{r}}\delta h + \frac{dh_0}{dr}\hat{\xi}}{h_0}$가 표면에서 $\frac{0}{0}$꼴이기 때문에 로피탈 정리를 사용하여 구할 수 있다.
(iii) 표면에서 주어진 또 다른 경계조건은 엔탈피의 라그랑지안 섭동이 0이라는 점이다($\Delta h = 0$). 이 식을 오일러 섭동으로 바꾸면 $\Delta h = \delta h + \frac{dh_0}{dr}\xi = 0$이고 표면에서 엔탈피의 미분값은 앞선 문제에서 구한 값을 사용하면 된다.
(iv) 섭동된 오일러 방정식을 통해 구할 수 있다.

δh는 ξ로 표현될 수 있고, ξ는 선형 해이기 때문에 별의 내부($\hat{r} = 0.5$)에서 두 변수가 연속이라는 2가지 조건을 두 해의 비율이 일치해야한다는 하나의 조건으로 줄일 수 있다. 즉,

$$\frac{\hat{\xi}_{\text{surface}}}{\delta h_{\text{surface}}} = \frac{\hat{\xi}_{\text{core}}}{\delta h_{\text{core}}} \tag{36}$$

core는 중심에서부터 계산한 해, surface는 표면에서부터 계산한 해를 의미한다. 그리고 위 조건을 충족시키기 위한 새로운 함수 f를 아래와 같이 정의한다.

$$f = \hat{\xi}_{\text{core}} \times \delta h_{\text{surface}} - \hat{\xi}_{\text{surface}} \times \delta h_{\text{core}} \tag{37}$$

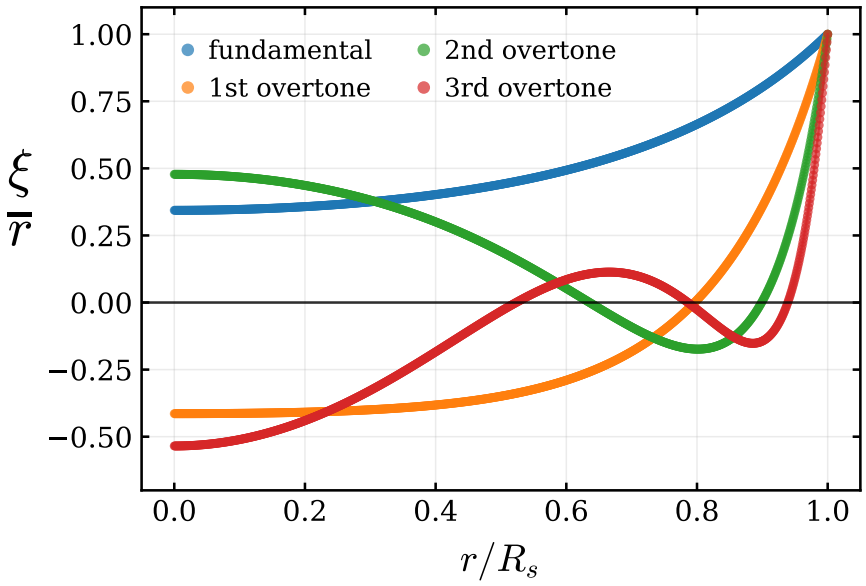

그림 2: $n = 1$, $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$, $K = 100$인 경우에 생기는 기본 진동모드와 1-4차 배음 모드

따라서 위 해가 0이 되게끔하는 ω를 1차원 뉴턴 랩슨법을 사용하여 구한다.

진동과 관련된 식들을 만족하는 해(ω)는 하나가 아니다. 관에 생기는 정상파가 다양한 모드를 가지듯이 별의 진동 또한 다양한 모드를 가진다. ξ가 별의 중심을 제외한 모든 지점에서 노드(node; 0이 되는 지점)을 가지지않는 기본(fundamental) 진동이 가장 낮은 진동수를 가지고, n번째 배음(overtone)은 n개의 노드를 가진다. 그림 (2)에서 파란색 점이 기본 진동을, 그리고 주황, 초록, 빨강, 보라순으로 한 단계 높은 배음을 나타낸다. 이번 실습에서 계산하는 진동들은 압력을 복원력으로 하는 진동으로, 이러한 진동의 경우 배음의 단계가 높아질수록 고유진동수도 같이 커지는 특성을 갖는다.

비방사형 진동

비방사형 진동의 경우 별의 중심에서 ξ가 $\hat{r}^{l-1}$에 비례하고, δh가 $\hat{r}^l$에 비례하는 것이 알려져있다. $l > 2$인 경우, 중심에서 ξ, $\frac{\partial \xi}{\partial \hat{r}}$, δh, $\frac{\partial \delta h}{\partial \hat{r}}$은 모두 0이 되므로 룽게 쿠타 방법을 사용하는 것이 불가하다. 이를 해결하기위해 아래와 같은 새로운 두 변수를 정의하자.

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \frac{\xi}{\hat{r}^{l-1}} = 1 + Ar \\ \delta\hat{h} &= \frac{\delta h}{\hat{r}^l} = B + Cr \end{aligned} \tag{38}$$

ξ는 선형 해이기 때문에 임의의 상수를 곱하는 것이 가능하므로 ξ의 가장 낮은 차수의 계수가 1이 되도록 설정할 수 있다.여기서 미지수 A, B, C는 아래와 같이 ξ와 δh를 다항식으로 전개한 후, 섭동된 식들에 대입하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi &= \hat{r}^{l-1} + A\hat{r}^l + \cdots \\ \delta h &= B\hat{r}^l + C\hat{r}^{l+1} + \cdots \end{aligned} \tag{39}$$

중심과 매우 가까운 영역을 생각해보자. $\hat{r}$이 매우 작을 것이기 때문에 $\hat{r}$로 식을 전개하였을 때, 방정식이 성립하기 위해서는 모든 $\hat{r}$의 차수마다 계수가 0이 되어야한다. 모든 $\hat{r}$의 차수에서 계수가 0이 되게하는 미지수 A, B, C를 찾아보자.
새로 정의한 두 변수는 기존 변수와 달리 중심에서 함숫값이 0이 되지 않는다. 새로 정의한 두 변수$\hat{\xi}$와 $\delta\hat{h}$에 대해 중심에서의 경계조건은 아래와 같이 쉽게 주어진다.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \hat{\xi}(\hat{r}=0) &&= 1 \\
&\text{(ii)} \quad \left.\frac{d\hat{\xi}}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} &&= B \\
&\text{(iii)} \quad \delta\hat{h}(\hat{r}=0) &&= C \\
&\text{(iv)} \quad \left.\frac{d\delta\hat{h}}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=0} &&= D
\end{aligned} \tag{40}$$

별의 표면$(\hat{r}=1)$에서의 경계조건은 식을 $\hat{\xi}$와 $\delta\hat{h}$에 대해 정리한 후 방사형 진동에서와 같은 방식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \hat{\xi}(\hat{r}=1) &&= 1 \\
&\text{(ii)} \quad \left.\frac{d\hat{\xi}}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= \\
&\text{(iii)} \quad \delta h(\hat{r}=1) &&= -\frac{1}{R_s}\frac{dh_0}{d\hat{r}} \\
&\text{(iv)} \quad \left.\frac{d\delta h}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&=
\end{aligned} \tag{41}$$

(i) $\hat{\xi}$가 표면에서 1이 되게끔 설정한다.
(iii) 엔탈피의 라그랑지안 섭동이 0이라는 점을 이용한다($\Delta h = 0$).
(ii), (iv) 섭동을 취한 연속방정식과 오일러 방정식을 통해 구할 수 있다.

5 일반상대론

회전하지 않는 정적(static)이며 구대칭(spherically symmetric)인 물질 분포를 가정하면, 시공간은 시간에 따라 변하지 않고 모든 각방향에서 동일한 대칭을 갖는다. 따라서 계량텐서(metric tensor)는 시간좌표 t와 반지름좌표 r에만 의존하는 함수들로 표현될 수 있다. 또한 구대칭성 때문에 각부분은 반드시 $r^2 d\Omega^2$ 형태를 가져야 하며, 여기서 $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ 이다. 적절한 좌표 선택을 통해 교차항($dt\, dr$ 등)은 제거할 수 있으므로, 결과적으로 회전하지 않는 구대칭 물질 분포에서의 선요소(line element)는

$$ds^2 = -e^{2\Phi_0(t,r)}dt^2 + e^{2\Lambda_0(t,r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right) \tag{42}$$

와 같은 형태로 쓸 수 있다. 여기서 $\Phi_0(t,r)$와 $\Lambda_0(t,r)$는 각각 시간 성분과 반지름 성분의 중력 퍼텐셜 및 곡률 정보를 담는 함수이다.

완전유체(perfect fluid)를 가정하면, 물질은 점성이나 열전달이 없고 압력이 모든 방향에서 동일한 등방적(isotropic) 형태를 갖는다. 이러한 경우 유체의 에너지-모멘텀 텐서(energy-momentum tensor)는 유체의 에너지 밀도와 압력만으로 표현될 수 있다. 유체의 4-속도를 u^a, 에너지 밀도를 ρ_0, 압력을 P_0라 하면, 완전유체의 에너지-모멘텀 텐서는 공변적으로 다음과 같이 주어진다:

$$T^{ab} = \rho_0 h_0 u^a u^b + P_0 g^{ab} \tag{43}$$

여기서 h_0는 특정 엔탈피(specific enthalpy)로, 내부에너지와 압력의 기여까지 포함한 총 에너지 밀도를 나타내며,

$$h_0 = 1 + \epsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \tag{44}$$

와 같이 정의된다. ϵ_0는 유체의 내부에너지이다.

정지한 별의 4-velocity의 경우 $u \cdot u = -1$임을 이용하여 아래와 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$u^\mu = (\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}, 0, 0, 0) = (e^{-\Phi_0}, 0, 0, 0) \tag{45}$$

아인슈타인 방정식

아인슈타인 방정식은 아래와 같이 쓰여진다.

$$G^a{}_b \equiv R^a{}_b - \frac{1}{2} R\, \delta^a{}_b = 8\pi T^a{}_b \tag{46}$$

구 대칭 별에 대한 메트릭(식 42)에 대해 필요한 혼합성분 $G^a{}_b$는 다음과 같다.

$$G^t{}_t = -\frac{2r\,\partial_r \Lambda(r,t) + e^{2\Lambda(r,t)} - 1}{r^2 e^{2\Lambda(r,t)}}, \tag{47}$$

$$G^r{}_r = \frac{2r\,\partial_r \Phi(r,t) - e^{2\Lambda(r,t)} + 1}{r^2 e^{2\Lambda(r,t)}}, \tag{48}$$

$$G^t{}_r = \frac{2\,\partial_t \Lambda(r,t)}{r\, e^{2\Lambda(r,t)}}. \tag{49}$$

이후 전개에서는 $G^\theta{}_\theta$ 및 $G^\phi{}_\phi$ 성분은 특별히 사용하지 않으므로 생략한다.

이제 완전유체의 에너지모멘텀 텐서 정의(식 43)와 함께 아인슈타인 텐서 성분(식 47-49)을 써보면 아래와 같이 써진다.

$$-\frac{2r\,\partial_r \lambda + e^{2\lambda} - 1}{r^2 e^{2\lambda}} = 8\pi \left(\rho h u^t u_t + P\right), \tag{50}$$

$$\frac{2r\,\partial_r \phi - e^{2\lambda} + 1}{r^2 e^{2\lambda}} = 8\pi \left(\rho h u^r u_r + P\right), \tag{51}$$

$$\frac{2\,\partial_t \lambda}{r\, e^{2\lambda}} = 8\pi \rho h u^t u_r \tag{52}$$

유체 방정식

일반상대론에서 이상기체와 같은 유체는 완전유체(perfect fluid)로 근사할 수 있으며, 그 운동은 국소적인 질량 보존과 에너지–모멘텀 보존 법칙으로 기술된다. 즉, 유체의 기본 방정식은 다음 두 보존식으로 주어진다.

$$\nabla_a \left(\rho_0 u^a\right) = 0, \tag{53}$$

$$\nabla_a T^a{}_b = 0, \tag{54}$$

여기서 ρ_0는 rest-mass density(질량밀도), u^a는 유체의 4-속도이며 $T^a{}_b$는 에너지–모멘텀 텐서를 나타낸다.

식 (54)는 에너지–모멘텀 보존을 의미하며, 이를 성분별로 전개하면 유체의 에너지 방정식($b = t$)과 반지름 방향 운동량(오일러) 방정식($b = r$)을 얻을 수 있다. 일반적으로는 투영 텐서를 이용하여 에너지 방정식과 운동량 방정식으로 분해하지만, 이는 동일한 내용을 좌표계와 무관한 형태로 정리한 것일 뿐이다. 따라서 본 실습에서는 $\nabla_a T^a{}_b = 0$를 직접 사용해도 무방하다.

질량 보존식 (53)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}\,\rho_0 u^a\right)=0, \tag{55}$$

여기서 계량의 행렬식은

$$\sqrt{-g}=e^{\phi+\lambda}r^2\sin\theta \tag{56}$$

로 주어진다. 구대칭 조건을 적용하면, 질량 보존식은 다음과 같은 연속방정식으로 정리된다.

$$\partial_t\left(e^{\phi+\lambda}r^2\rho_0 u^t\right)+\partial_r\left(e^{\phi+\lambda}r^2\rho_0 u^r\right)=0. \tag{57}$$

에너지–모멘텀 보존식 $\nabla_a T^a{}_b=0$에서 $b=r$ 성분을 취하면

$$\nabla_a\Big(\rho h\,u^a u_r+p\,\delta^a{}_r\Big)=0 \tag{58}$$

을 얻는다.

TOV 형태의 계량 텐서에서 계산해보면 최종적으로 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}0=u_r\,\frac{1}{e^{\phi+\lambda}r^2}\left[\partial_t\left(e^{\phi+\lambda}r^2\rho h\,u^t\right)+\partial_r\left(e^{\phi+\lambda}r^2\rho h\,u^r\right)\right]\\ +\rho h\Big[u^t\partial_t u_r+u^r\partial_r u_r-\Gamma^t{}_{tr}u^t u_t-\Gamma^r{}_{tr}u^t u_r-\Gamma^t{}_{rr}u^r u_t-\Gamma^r{}_{rr}u^r u_r\Big]+\partial_r p.\end{aligned} \tag{59}$$

내부구조

아인슈타인 방정식($G^\mu_\nu=8\pi T^\mu_\nu$)의 tt성분과 rr성분을 계산하면 아래와 같은 평형식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\Lambda_0}{dr}=\frac{1}{2r}\left(1-e^{2\Lambda_0}\right)+4\pi r\left(\rho_0+nP_0\right)e^{2\Lambda_0} \tag{60}$$

$$\frac{d\Phi_0}{dr}=-\frac{1}{2r}\left(1-e^{2\Lambda_0}\right)+4\pi rP_0e^{2\Lambda_0} \tag{61}$$

그리고 r-운동량 보존식(식 59)에서 $\partial_t=0$, $v^r=0$을 적용 시키면,

$$\frac{dh_0}{dr}=-h_0\frac{d\Phi_0}{dr} \tag{62}$$

이다.

위 세 개의 식을 이용하여 평형 상태의 별 속에서의 메트릭과 엔탈피(밀도)의 구조를 계산하고자 한다. 별의 중심($\hat{r}=0$)에서 Φ_0의 값은 알 수가 없다. 따라서 임의의 값(Φ_c)으로 초기값을 둔 뒤, 슈팅 방법을 통해 수렴시킨다. 그 외의 경계조건은 직접 구하여 사용한다.

그리고 별의 표면($\hat{r}=1$)에서의 경계조건은 아래와 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \Lambda_0(\hat{r}=1) &&= \Lambda_s \\
&\text{(ii)} \quad \left.\frac{d\Lambda_0}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= -\frac{1}{2}\left(1-e^{2\Lambda_s}\right) \\
&\text{(iii)} \quad \Phi_0(\hat{r}=1) &&= -\Lambda_s \\
&\text{(iv)} \quad \left.\frac{d\Phi_0}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= \frac{1}{2}\left(1-e^{2\Lambda_s}\right) \\
&\text{(v)} \quad h_0(\hat{r}=1) &&= 1 \\
&\text{(vi)} \quad \left.\frac{dh_0}{d\hat{r}}\right|_{\hat{r}=1} &&= -\frac{1}{2}\left(1-e^{2\Lambda_s}\right)
\end{aligned}
\tag{63}
$$

(i), 표면에서의 Λ_0의 값을 구하는 것이 불가하다. 그래서 임의의 값으로 초기값을 준 뒤 슈팅 방법으로 수렴시킨다.
(ii), (iv), (vi) 평형 방정식을 통해 얻을 수 있다.
(iii) 별의 표면에서 내부의 메트릭과 외부 메트릭은 연속이어야 한다. 외부가 진동이라 가정하면 Birkhoff's 정리에 의해 외부해는 슈바르츠실트 메트릭을 만족하므로 아래와 같은 조건을 만족한다.

$$
e^{2\Phi_0} = 1-\frac{2M}{R_s}, \qquad e^{-2\Lambda_0} = 1-\frac{2M}{R_s} \tag{64}
$$

두 식을 연립하면 표면에서 $\Phi_0 = -\Lambda_0$임을 알 수 있다.
(v) 별 표면에서 밀도가 0이므로 식 (10)에 의해 1임을 알 수 있다.

3개의 변수 h, Λ_0, Φ_0가 $\hat{r}=0.5$에서 연속이라는 조건을 사용하여 3개의 슈팅 변수 R_s(별의 반지름), Λ_s(별의 표면에서의 Λ_0의 값), Φ_c(별의 중심에서의 Φ_0의 값)를 구하여라.

방사형 진동

방사형 진동을 계산하기 위해 θ, ϕ방향의 성분이 없는 섭동을 고려해보자. $u\cdot u = g_{tt}\left(u^t\right)^2 + g_{rr}\left(u^r\right)^2 = -1$에 섭동을 넣으면 정지된 별의 경우, 4-velocity 섭동의 시간 성분과 r방향 성분은 아래와 같이 나온다.

$$
\delta u^t = -\delta\Phi e^{-\Phi_0} \tag{65}
$$

$$
\delta u^r = \frac{\partial\xi}{\partial t}e^{-\Phi_0} \tag{66}
$$

여기서 ξ은 아래와 같이 정의된다.

$$
\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^r}{u^t} \tag{67}
$$

연속방정식(식 53)과 운동량 보존식(오일러 방정식, 식 54)에 섭동을 추가하여 일차까지만 고려하면 아래와 같은 식이 된다.

$$
\frac{n}{h_0-1}\left(\delta h + \frac{dh_0}{dr}\xi\right) + \frac{1}{r^2}e^{-\Lambda_0}\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{\Lambda_0}\xi\right) + \delta\Lambda = 0 \tag{68}
$$

$$
e^{2(\Lambda_0-\Phi_0)}\omega^2\xi + \frac{1}{h_0}\frac{d\delta h}{dr} - \frac{\delta h}{h_0^2}\frac{dh_0}{dr} + \frac{d\delta\Phi}{dr} = 0 \tag{69}
$$

식 (68)은 연속방정식에 대한 섭동 그리고 식 (69)은 r-운동량 보존 식에 대한 섭동이다.

또한 아인슈타인 방정식 t-r, r-r성분(식 51-52)에 섭동을 적용하면 아래의 두개의 식을 찾을 수 있다.

$$\delta\Lambda + \left(\frac{d\Lambda_0}{dr} + \frac{d\Phi_0}{dr}\right)\xi = 0 \tag{70}$$

$$\frac{d\delta\Phi}{dr} + 4\pi K\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{h_0-1}{K(n+1)}\right)^{n+1}\frac{1}{r}e^{2\Lambda_0+\Phi_0}\frac{d}{dr}\left(r^2e^{-\Phi_0}\xi\right) - 4\pi\left(\frac{h_0-1}{K(n+1)}\right)^{n}\left[r\frac{dh_0}{dr}-h_0\right]e^{2\Lambda_0}\xi = 0 \tag{71}$$

뉴턴역학에서의 Cowling 근사는 중력퍼텐셜의 섭동을 무시하는 것이었다($\delta\Phi = 0$). Cowling 근사를 상대론적 버전은 메트릭의 섭동을 무시하는 것이다. 즉,

$$\begin{aligned}\delta\Lambda &= 0\\ \delta\Phi &= 0\end{aligned} \tag{72}$$

이고 아래와 같이 식이 축소된다.

$$\frac{n}{h_0-1}\left(\delta h + \frac{dh_0}{dr}\xi\right) + \frac{1}{r^2}e^{-\Lambda_0}\frac{d}{dr}\left(r^2e^{\Lambda_0}\xi\right) = 0 \tag{73}$$

$$e^{2(\Lambda_0-\Phi_0)}\omega^2\xi + \frac{1}{h_0}\frac{d\delta h}{dr} - \frac{\delta h}{h_0^2}\frac{dh_0}{dr} = 0 \tag{74}$$

계산 방식은 뉴턴역학에서와 동일하다. $\hat{\xi} = \xi/\hat{r}$로 식을 정리한 뒤, 별의 중심($\hat{r}=0$)과 별의 표면($\hat{r}=1$)에서 경계조건을 구하고, 슈팅 방법을 통해 ω를 구한다.
* 주의: 일반상대론의 경우 colwing근사를 사용하지 않으면 ω^2이 0보다 작아질 수 있기 때문에 슈팅 변수를 ω가 아닌 ω^2을 사용한다.

6 중력파 방출

평평한 시공간에 약한 중력 섭동이 가해진 상황을 생각해보자. 즉, 계량 텐서를 민코프스키(Minkowski) 계량과 작은 섭동의 합으로 가정하자.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{75}$$

여기서 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$이다. $|h_{\mu\nu}| \ll 1$로 섭동이 충분히 작다고 가정하면, 중력장 방정식을 h의 1차(선형) 차수까지 근사하여 다룰 수 있다.

그리고 광속에 비해 매우 느리게 움직이는(비상대론적) 물질의 경우 정지 질량이 가장 지배적이다. 따라서 에너지-운동량 텐서를 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \tag{76}$$

선형화된 중력장 방정식을 사용할 때 $h_{\mu\nu}$를 사용하는 것보다 다음과 같이 정의된 새로운 변수를 사용하는 것이 더욱 쉬워진다.

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h \tag{77}$$

여기서 h는 $h_{\mu\nu}$의 합(trace)으로 $h = h^k_k$이다. 위와 같은 연산을 통해 $\bar{h}$는 h와 부호가 반대인 대각합을 갖는다. $\bar{h}$를 도입함으로써 선형화된 중력장 방정식은 아래와 같이 파동방정식의 형태를 가진다.

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{78}$$

여기서 $\Box = -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$로 정의된 달랑베르 연산자(d'Alembertian operator)이다. 식 (78)는 다음과 같은 일반해를 갖는다.

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = 4 \int d^3x' \frac{T^{\alpha\beta}\left(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}'\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{79}$$

$T^{\alpha\beta}$에 들어가는 $t - |\vec{x} - \vec{x}'|$는 중력파의 방출과 관측사이에 생기는 지연시간(retarded time)이다. 이는 중력파가 광속($c = 1$)으로 전파되기 때문에 생긴다.

이제 굉장히 멀리 떨어진 비상대론적 파원으로부터 방출된 중력파를 관측하는 상황을 생각해보자. 파원으로부터 멀어지게 되면 방출된 파동은 평면파의 형태를 갖게 되고, 식 (78)에서 $|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq r$로 근사할 수 있다. 여기서 r은 파원과 관측자 사이의 거리이다. 또한, 비상대론적 파원으로부터 방출되었기에 식 (76)을 대입하면 식 (78)을 만족하는 중력파는 아래와 같이 근사적으로 계산할 수 있다.

$$\bar{h}^{ij}(t, \vec{x}) \simeq \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r) \tag{80}$$

여기서 I는 아래와 같이 정의되는 사중극자 모멘트(quadrupole moment)이다.

$$I^{ij}(t) \equiv \int d^3x \rho(t, \vec{x}) x^i x^j \tag{81}$$

사중극자 모멘트는 물질의 비대칭성을 나타내는 값으로, 방사형 진동의 경우 사중극자 모멘트를 변화시키지 못한다. 하지만 비방사형 진동의 경우 사중극자 모멘트를 변화시키고, 중력파를 만들어내는 것이 가능하다. 따라서 사중극자 모멘트를 직접 계산하여 비방사형 진동에 의해 발생하는 중력파의 세기를 추정하고자 한다.

7 수치 계산 방법

룽게-쿠타 2차 방법

룽게-쿠타 2차 방법(Runge Kutta 2nd order method, RK2)은 1계 상미분 방정식의 초기값 문제(Initial Value Problem)를 수치적으로 풀기위한 방법이다. 단순히 $n+1$ 번째 스텝을 계산하기 위해 n번째 스텝에서의 미분값을 그대로 사용하는 오일러 방법(Euler's Method)과 다르게 추가적인 스텝 하나를 추가하여 정확도를 개선한 방법이다.

다음과 같이 n번째 스텝에서 함숫값과 미분값이 주어진 상황을 고려해보자.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n = f(x_n, y_n), \quad y(x_n) = y_n \tag{82}$$

여기서 h를 스텝 간격(step size)이라 할 때, $x_{n+1} = x_n + h$이다.

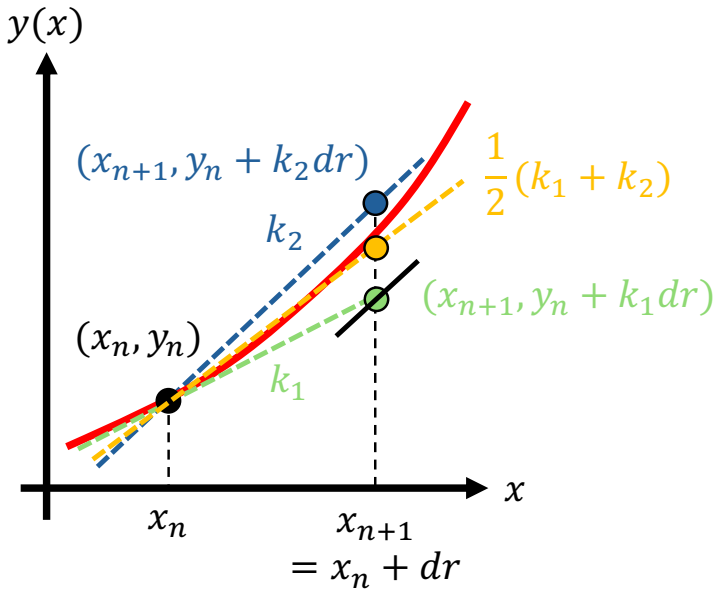

그림 3: Heun의 방법을 기반으로 한 룽게 쿠타 2차 방법. 녹색 선(k_1)은 (x_n, y_n)에서 평가한 기울기이고, 파란 선(k_2)는 녹색 점에서 평가한 기울기이다. 최종적으로 결정되는 $n+1$번째 스텝은 두 기울기의 평균(노란색)을 통해 구한다.

룽게 쿠타 2차 방법의 일반식은 다음과 같이 주어진다.

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{83}$$

여기서 기울기 k_1, k_2는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \end{aligned}$$

2차 정확도($O(h^2)$)를 만족하기 위한 계수들의 조건은 다음과 같습니다.

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2\alpha = \frac{1}{2}, \quad a_2\beta = \frac{1}{2} \tag{84}$$

4개의 미지수에 비해 계수간의 관계식은 3개로 미지수가 고유한 해를 가지지 않기 때문에 여러 가지 방식이 존재한다. 본 실습에서는 Heun의 방법이라 불리는 계수를 사용할 것이다. Heun의 방법에서 계수는 다음과 같은 값을 가진다.

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \beta = 1 \tag{85}$$

즉,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + h, y_n + h k_1) \end{aligned} \tag{86}$$

이고,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h. \tag{87}$$

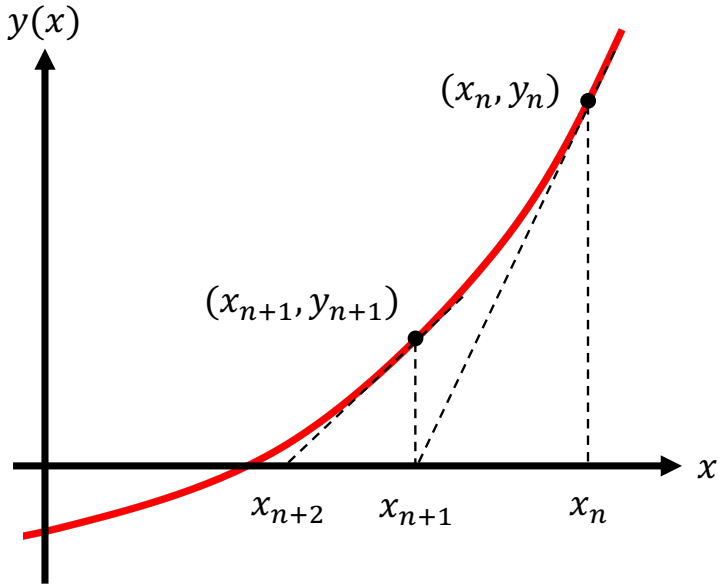

그림 4: 1차원 뉴턴 랩슨 방법. x_n에서의 함숫값과 미분값을 이용하여 x_{n+1}의 근사해를 구한다.

이러한 관계는 그림 (3) 통해 더욱 자세히 볼 수 있다.

이 방법의 국소 절단 오차(Local Truncation Error)는 $O(h^3)$이며, 전체 구간에 대한 전역 오차(Global Error)는 $O(h^2)$이다.

뉴턴 랩슨 법

뉴턴 랩슨 법(Newton-Raphson Method)은 실수 함수 $f(x) = 0$의 해를 찾기 위한 가장 널리 사용되는 수치해석 방법 중 하나로 초기값 x_0에서 시작하여 접선을 이용해 점차 해에 수렴해가는 반복법(Iterative Method)이다.

함수 $y = f(x)$가 미분 가능하다고 가정하자. 초기값을 x_n이라 할 때, 곡선 상의 점 $(x_n, f(x_n))$에서의 접선의 방정식을 구하면, 접선의 기울기는 $f'(x_n)$이므로, 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{88}$$

이 접선이 x축과 만나는 점($y = 0$)을 새로운 근사해 x_{n+1}로 정의하자. 위 식에 $y = 0, x = x_{n+1}$을 대입하면 다음과 같다.

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{89}$$

이를 x_{n+1}에 대해 정리하면 뉴턴-랩슨 법의 점화식을 얻을 수 있다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{90}$$

단, 여기서 $f'(x_n) \neq 0$이어야 한다. 이 과정을 반복하면 점차 실제 해에 점차 다가갈 수 있게 된다.

하지만 우리가 계산하고자 하는 함수는 $\hat{r} = 0.5$에서 양쪽 해의 차이값으로 정의되므로 미분값을 직접적으로 계산하는 것이 불가하다. 따라서 미분값을 근사적으로 구하기 위해 유한차분법(Finite difference method)을 사용하고자 한다. 특정 함수 f에 대해 x_0를 중심으로 하여 약간 떨어진 $x_0 - \Delta x$, $x_0 + \Delta x$에서 테일러 전개를 하면 아래와 같다.

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x) &\simeq f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}\Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}\Delta x^2 + \cdots \\
f(x_0-\Delta x) &\simeq f(x_0) - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}\Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}\Delta x^2 + \cdots
\end{aligned}
\tag{91}
$$

위 식을 연립하여 우리는 f의 미분값을 근사적으로 계산할 수 있다.

$$
\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}
\tag{92}
$$

만약, 우리가 찾아야하는 변수가 2개이상이 된다면 식(90)를 다차원으로 확장하여야 한다. 이것을 다변수 뉴턴 랩슨 방법이라고 한다. 다변수 뉴턴 랩슨 방법은 비선형 연립방정식

$$
\vec{F}(\vec{x}) = 0
\tag{93}
$$

의 해 $\vec{x}$를 반복적으로 근사하는 수치해석 기법이다. 여기서

$$
\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \qquad \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \ldots, F_n(\vec{x}))^T
\tag{94}
$$

이다.

현재 근사해 x_k 근방에서 $F(x)$를 1차 테일러 전개하면

$$
F(x_k + \Delta x) \approx F(x_k) + J(x_k)\,\Delta x
\tag{95}
$$

로 쓸 수 있다. 여기서 $J(x)$는 Jacobian 행렬로

$$
J(x) \equiv \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]
\tag{96}
$$

이다.

해에 다가가기 위해서는 $F(\vec{x}_k + \Delta\vec{x}_k) = 0$을 만족시키는 $\vec{x}$를 계속 찾아 가면 된다.

$$
F(\vec{x}_k + \Delta\vec{x}_k) \approx F(x_k) + J(x_k)\,\Delta x_k = 0
\tag{97}
$$

을 얻는다. 따라서 매 반복마다 선형 연립방정식

$$
J(x_k)\,\Delta x_k = -F(x_k)
\tag{98}
$$

을 풀어 Δx_k를 구하고, 해를 다음과 같이 갱신한다:

$$
x_{k+1} = x_k + \Delta x_k.
\tag{99}
$$

이를 정리하면 Newton–Raphson 반복은

$$
x_{k+1} = x_k - J(x_k)^{-1}F(x_k)
\tag{100}
$$

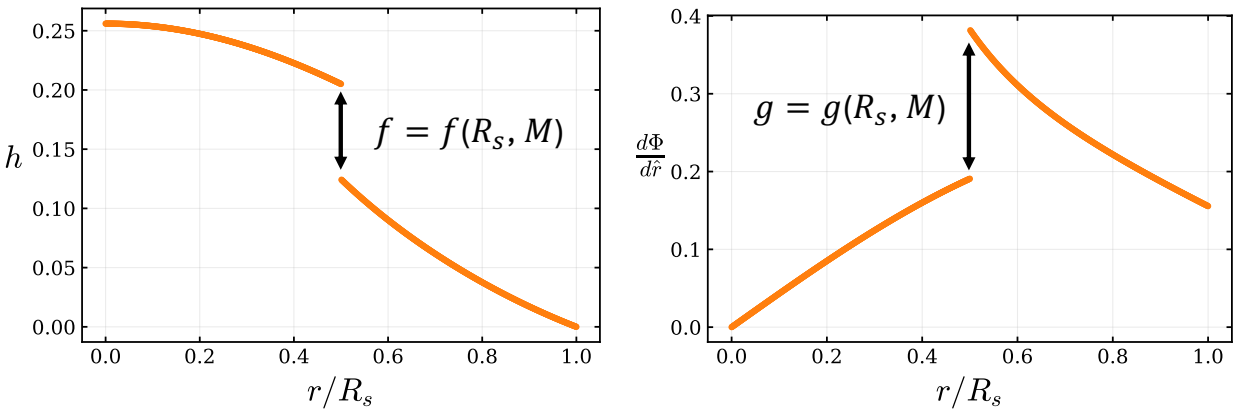

그림 5: $n = 1$, $\rho_c = 1.28 \times 10^{-3}$, $K = 100$일 때 $M = 1.4$, $R_s = 9$를 초기값으로 사용하여 얻은 h와 $\frac{d\Phi}{d\hat{r}}$

로 쓸 수 있다. 다만 실제 계산에서는 역행렬을 직접 구하기보다는 선형계 $J(x_k)\Delta x_k = -F(x_k)$를 수치적으로 푸는 방식이 사용된다. 선형대수 계산을 수행해주는 라이브러리는 파이썬: Numpy or Scipy, C언어: GSL, 포트란: LAPACK 등이 있다.

슈팅 방법

슈팅 방법(shooting method)는 하나의 경계값 문제(Boundary Value Problem)를 초기값 문제로 변환해주는 방법이다. $x = 0$과 $x = 1$에서 경계값이 주어진 미분방정식을 풀어서 별의 구조(엔탈피)를 계산한다고 생각해보자. 우리는 $x = 0$과 $x = 1$에서의 경계값과 룽게 쿠타 2차 방법을 사용하여 $x = 0.5$에서의 엔탈피의 함숫값을 양쪽에서 계산하는 것이 가능하다. 하지만 슈팅 방법을 통해 구해야하는 변수($e.g.$ 별의 반지름, 진동의 주파수)에 임의의 초기값을 넣었기 때문에 양쪽에서 구한 엔탈피는 다른 값을 가질 것이다(그림 5). 엔탈피와 중력퍼텐셜의 미분값이 모두 별의 내부에서 연속이어야하므로 양쪽에서 구한 엔탈피와 중력퍼텐셜의 미분값을 같게 만드는 별의 반지름과 질량을 찾아야한다. 즉, 별의 중심($\hat{r} = 0$)부터 계산된 엔탈피($h_{(-)}$)와 별의 표면($\hat{r} = 1$)부터 계산된 엔탈피($h_{(+)}$)의 차를 새로운 함수 $f(R_s, M) \equiv h_{(+)} - h_{(-)}$로 정의했을 때, $f(R_s, M) = 0$을 만족하는 R_s와 M을 찾아야한다. 마찬가지로 별의 중심($\hat{r} = 0$)부터 계산된 중력퍼텐셜의 도함수($\frac{d\Phi}{dr}_{(-)}$)와 별의 표면($\hat{r} = 1$)부터 계산된 중력퍼텐셜의 도함수($\frac{d\Phi}{dr}_{(+)}$)의 차로 정의된 함수 $g(R_s, M) \equiv \frac{d\Phi}{dr}_{(+)} - \frac{d\Phi}{dr}_{(-)}$도 동시에 0이 되는 R_s와 M을 찾아야한다. 두 개의 변수에 대해 두 개의 함수의 근을 찾아야하므로 Sec. 7에서 소개한 2차원 뉴턴 랩슨 방법을 사용한다. 매 뉴턴 랩슨 방법은 함수 f와 g가 10^-12보다 작아질 때까지 반복한다.

적분법

사중극자 모멘트를 계산하기 위해서는 식 (81)의 적분을 수행해야한다. 그러나 이러한 적분을 해석적으로 하는 것은 불가능하고, 앞선 계산과 동일하게 그리드를 나누어 적분하고자 한다. (x, y, z)가 각각 $[-1, 1]$인 공간에 원점을 중심으로 반지름이 1인 구 형태의 별을 생각해보자. 해당 공간에서 좌표 x, y, z를 각각 1000개로 나누고(1001개의 그리드 포인트), 각 그리프 포인트를 중심으로 하는 정육면체 1001^3개로 나눠었을 때, 각 큐브의 중앙의 위치가 원점으로부터 거리가 1이 넘으면 해당 정육면체가 별의 외부로, 1보다 작거나 같으면 별 내부로 간주하자.

하나의 정육면체 내의 밀도를 큐브의 중앙점을 기준으로 테일러 전개한 뒤, 정육면체 내에서 적분해보자.

$$\begin{aligned}\int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x}\rho(x)dx &= \int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x}\left(\rho(x_0)+\left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2\rho}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots\right)dx \\ &\simeq \int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x}\left(\rho(x_0)+\left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0)\right)dx \\ &= \rho(x_0)\int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x}dx+\left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=x_0}\int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x}(x-x_0)\,dx \\ &= \rho(x_0)\Delta x\end{aligned} \tag{101}$$

이는 3차원으로 확장하여도 동일하므로, 특정 정육면체속의 밀도는 $O(\Delta x^2)$ 오차내에서 일정하다고 볼 수 있다. 정육면체의 밀도는 정육면체 중심에서의 값을 사용하고, 앞선 문제들에서 계산한 값을 사용한다. 만약 정육면체 중심의 반경 r이 앞선 문제에서 구한 그리드 위에 위치하지 않을 경우, 선형보간법을 사용하여 해당 위치의 밀도를 계산한다. 별 내에 존재하는 모든 큐브에 대해 $\Delta x^3\rho(\vec{x})x^ix^j$를 계산한 뒤, 모두 합하여 식 (81)을 계산한다.

선형보간법

선형보간법이란, 서로 다른 두 점이 주어졌을 때 그 두 점을 잇는 직선을 잇고, 해당 직선 위에서 원하는 입력 값에 대응하는 출력 값을 추정하는 방법이다. 즉, 데이터가 선형적으로 변화한다고 가정함으로써 계산을 단순화한다.

어떤 함수 $f(x)$에 대하여 $x=x_1$에서의 값 $y_1=f(x_1)$과 $x=x_2$에서의 값 $y_2=f(x_2)$만 알고 있고, x_1과 x_2 사이에 존재하는 x_0에 해당하는 함수값 $y=f(x_0)$가 필요한 상황을 생각해보자. 두 점 (x_1,y_1)와 (x_2,y_2)과 구하고자 하는 점 (x,y)가 모두 한 직선 위에 있다고 가정함으로써 계산을 단순화한다. 세 점을 지나는 직선의 방정식을 세우면 아래와 같다.

$$y_0=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_0-x_1) \tag{102}$$

이를 통해 우리는 x_0에서의 함수값 y_0를 구할 수 있다. 또한, 선형보간법은 $O(h^2)$의 정확도를 가진다.

8 시각화 코드 사용 방법

비방사형 진동에 대해 더 깊이 이해하고자 이를 시각화하고자 한다. `animation.py`는 시각화를 위해 필요한 함수들이 들어있으므로 직접 작성할 필요 없음.

(python) 필요 패키지

- numpy
- scipy
- matplotlib
- ffmpeg
- pathlib
- typing

`2d_motion.py`

별의 xy, xz, yz평면에 대해 밀도에 가해지는 섭동과 진동에 의해 발생하는 유체의 움직임을 시각화한다.

- `input_filename_background` : 배경 엔탈피에 대한 입력 파일명으로, 파일 구조는 문제 1과 동일하다.

- `input_filename_oscillation` : 비방사형 진동에 대한 입력 파일명으로, 파일 구조는 문제 3과 동일하다.
- `output_filename` : 출력 파일의 파일명으로, ".mp4" 또는".gif" 확장자를 사용한다.
- `l, m` : 구면 조화 함수의 차수를 의미한다. 임의의 l에 대해 $0 \leq m \leq l$만 가능하다.
- `plane` : "xy", "xz", "yz" 세 문자열 중 하나를 사용한다.

3d_motion.py

별의 표면에서 진동에 의해 발생하는 유체의 움직임을 시각화한다. 점이 빨간색으로 변하는 것은 해당 점이 구 표면에서 바깥쪽으로 튀어나옴을, 파란색으로 변하는 것은 점이 구 표면에서 안쪽으로 들어감을 나타낸다.

- `input_filename` : 비방사형 진동에 대한 입력 파일명으로, 파일 구조는 문제 3과 동일하다.
- `output_filename` : 출력 파일의 파일명으로, ".mp4" 또는".gif" 확장자를 사용한다.
- `l, m` : 구면 조화 함수의 차수를 의미한다. 임의의 l에 대해 $0 \leq m \leq l$만 가능하다.

References

[1] `https://news.samsungdisplay.com/15179`

[2] Jørgen Christensen-Dalsgaard, Lecture Notes on Stellar Oscillations, 2014
`https://users-phys.au.dk/jcd/oscilnotes/`

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation, Princeton University Press, Princeton (2017).

[4] J. B. Hartle, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, Pearson Education, Upper Saddle River, NJ (2003).