# 2024 수치상대론 겨울학교 수치 천체물리 부문 문제

## 개요

쌍성은 두 별이 서로의 중력에 이끌려 궤도 운동하는 천체를 말한다. 쌍성의 운동은 우주에 존재하는 천체들의 운동 중 가장 단순한 형태의 운동이며 이론적인 해가 존재한다. 하지만 쌍성은 항성의 진화 과정에서 매우 특이한 천체들을 만들어 낼 수 있는데, 진화 과정에서 별 사이에 질량을 전달하여 강한 자외선이나 X-선 등을 방출하기도 하며, 밀도가 매우 큰 밀집성(백색왜성, 중성자별, 블랙홀)들로 이루어진 쌍성이 매우 가까운 궤도를 돌 경우에는 중력파를 발생시키기도 한다. 실제로 현재까지 국제 중력파 검출기 네트워크를 통해 검출된 중력파는 모두 밀집성 쌍성 (블랙홀-블랙홀, 블랙홀-중성자별, 중성자별-중성자별)으로부터 발생한 중력파이다. 이번 2024 년 겨울학교 수치 천체물리 부문 문제는 이러한 쌍성의 궤도를 직접 구해보고 두 블랙홀이 실제로 중력파를 내며 충돌하는 과정에 대해 풀어보고자 한다.

쌍성의 궤도운동을 풀기 위해서는 중력에 의한 미분방정식을 풀어야한다. 이번 문제에서는 4 차 예측자-수정자 (predictor-corrector) 방식을 사용한다.

우선 현재 시간 $t_0$에 상대 별로부터 생기는 중력에 의한 가속도는 다음과 같이 구할 수 있다. 편의상 현재 위치는 인덱스 0, 다음 위치는 1 로, 적분하려는 별을 $i$, 중력을 미치는 상대 별을 $j$ 라고 표현한다. 이 경우 중력가속도 $\mathbf{a}_{0,i}$ 와 시간에 대한 1 차 미분 $\dot{\mathbf{a}}_{0,i}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a}_{0,i} = -\sum_{i\neq j} Gm_j \frac{\mathbf{R}}{r^3} \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{0,i} = -\sum_{i\neq j} Gm_j \left[\frac{\mathbf{V}}{r^3} - \frac{3\dot{r}\mathbf{R}}{r^4}\right] \tag{2}$$

여기에서 $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_{0,i} - \mathbf{r}_{0,j})$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_{0,i} - \mathbf{v}_{0,j})$ 로 상대 위치, 속도 벡터이며 $r$은 두 별 사이의 거리이다. 두 별 사이 거리 $r$ 의 시간에 따른 변화량은 속도 벡터의 $r$ 방향 성분이며 다음과 같이 나타낼 수 있다. $\dot{r} = (\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})/r$

중력가속도와 1 차 미분 값을 바탕으로 테일러 급수 전개를 통해 먼저 $i$ 별의 다음 위치와 속도를 다음과 같이 [예측]한다.

예측 값은 인덱스 p 로 표현한다. 다음 시간을 $t$ 로 정의하고 두 시간 사이의 간격을 $\Delta t$라고 할 때,

$$\mathbf{r}_{p,i} = \mathbf{r}_{0,i} + \mathbf{v}_{0,i}\Delta t + \mathbf{a}_{0,i}\frac{\Delta t^2}{2} + \dot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^3}{6} \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_{p,i} = \mathbf{v}_{0,i} + \mathbf{a}_{0,i}\Delta t + \dot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^2}{2} \tag{4}$$

로 구할 수 있다. 이제, 다음 시간 $t$에서의 중력가속도 $\mathbf{a}_{p,i}$와 그 1 차 미분 $\dot{\mathbf{a}}_{p,i}$을 예측된 위치와 속도를 수식 (1)과 (2)에 대입해서 구한다. 또한 $\mathbf{a}_{p,i}$와 $\dot{\mathbf{a}}_{p,i}$는 수식 (3), (4)와 같이 테일러 급수 전개를 하면 다음의 수식을 만족한다.

$$\mathbf{a}_{p,i} = \mathbf{a}_{0,i} + \dot{\mathbf{a}}_{0,i}\Delta t + \ddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^2}{2} + \dddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^3}{6} \tag{5}$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{p,i} = \dot{\mathbf{a}}_{0,i} + \ddot{\mathbf{a}}_{0,i}\Delta t + \dddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^2}{2} \tag{6}$$

여기서 $\ddot{\mathbf{a}}_{0,i}$와 $\dddot{\mathbf{a}}_{0,i}$는 중력가속도의 시간에 대한 2 차 미분 3 차 미분이다. 우선 수식 (6)의 양변에 $\Delta t/2$를 곱하여 수식 (5)에서 빼 주면 $\ddot{\mathbf{a}}_{0,i}$로만 이루어진 수식이 되며 이를 정리하면

$$\dddot{\mathbf{a}}_{0,i} = 12\frac{\mathbf{a}_{0,i} - \mathbf{a}_{p,i}}{\Delta t^3} + 6\frac{\dot{\mathbf{a}}_{0,i} + \dot{\mathbf{a}}_{p,i}}{\Delta t^2} \tag{7}$$

가 되며 이를 수식 (5)에 넣어서 정리하면

$$\ddot{\mathbf{a}}_{0,i} = -6\frac{\mathbf{a}_{0,i} - \mathbf{a}_{p,i}}{\Delta t^2} - 2\frac{2\dot{\mathbf{a}}_{0,i} + \dot{\mathbf{a}}_{p,i}}{\Delta t} \tag{8}$$

로 현재 시간에서 중력가속도의 3 차미분까지 모두 구할 수 있다.

마지막으로 위치와 속도에 대해 고차원 테일러 급수 전개를 해준다. 예측된 위치에서 중력가속도의 2 차 미분과 3 차 미분을 사용하여 [보정]된 위치와 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}_{1,i}(t) = \mathbf{r}_{p,i} + \ddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^4}{24} + \dddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^5}{120} \tag{9}$$

$$\mathbf{v}_{1,i}(t) = \mathbf{v}_{p,i} + \ddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^3}{6} + \dddot{\mathbf{a}}_{0,i}\frac{\Delta t^4}{24} \tag{10}$$

이와 같은 방법을 사용하면 위치에 대해서 5 차, 전체 계산에 대해서 4 차의 정밀도를 보이게 된다.

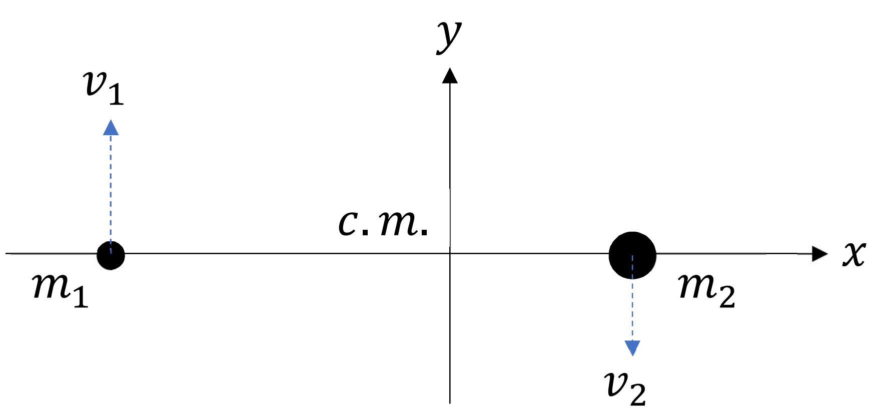
이번 문제에서는 위에 설명된 대로 시간 간격을 누적해서 적분하여 주어진 궤도를 구하면 된다.

**유의사항**

** 문제에 주어진 방식을 사용하여 적분하시오.

** 모든 문제의 초기 조건은 직접 구해야 합니다. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (vx_1, vy_1), (vx_2, vy_2)$

** 초기조건은 질량중심을 기준으로 기술하며 두 별은 $x$축 상에 놓여있고 원일점(apocenter)에 위치합니다. 두 별은 $xy$평면 위에서 볼 때 시계방향으로 회전합니다. 아래 그림 참고.




** 실제 별은 크기를 갖고 있지만 문제에서는 점질량(point-mass)으로 가정하고 풀이합니다.

** 계산 편의상 중력상수는 G = 1, 질량단위는 태양질량 $M_\odot$, 거리단위는 AU 로 고정하여 계산하고 속도와 시간에는 변환상수를 적용합니다 (문제 1.1).

** 단위 및 상수는 다음을 사용합니다.

$$\pi = 3.14159$$
$$G = 6.67430 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$$
$$c = 2.99792 \times 10^{10} cm/s$$
$$1AU = 1.49598 \times 10^{13} cm$$
$$M_\odot = 1.98854 \times 10^{33} g$$

** 모든 출력문은 정수은 정수형, 실수는 지수형 유효숫자 12 개로 출력합니다.

** 모든 문제는 하나의 코드에 각기 다른 입력변수를 넣어 실행되도록 만들어야 합니다.

** 입력변수는 $m_1$, $m_2$, $a$ (궤도장반경), $e$ (궤도이심률), number of periods, time step control, PN 옵션

** $m_1, m_2$는 태양질량 단위로 입력합니다. 장반경은 AU 단위입니다.

** 입력변수를 문제별로 파일로 만들어 함께 제출합니다.

** 모든 계산은 사칙연산만 사용합니다. 라이브러리 사용시 최종 점수에서 50%감점. (직접 만들어 사용하는 것은 허용)

** 제출한 정답과 코드 실행 출력문이 다를 경우 0 점 처리합니다.

** 문제의 정답은 json 형식의 파일을 사용해 제출하고, 소스 코드와 실행 파일, 입력변수파일들을 zip, tar 또는 gz 형식으로 제출합니다. 채점은 문제풀이와 같은 환경에서 시행되며 올바르게 시행되지 않는 코드는 0 점처리 됩니다.

**문제 1: 원 궤도 운동을 계산하시오.**

1.1) 속도 단위와 시간 단위 변환상수를 구하시오 (10 점, 각 5 점)

중력 상수 $G = 1$, 질량 단위 태양 질량 $M_{\odot}$, 거리 단위 AU 로 고정하여 계산할 때, 내부의 속도 변환상수를 km/s, 시간의 변환상수를 second 단위로 나타내시오.

1.2) 질량이 각각 1 태양질량, 궤도 장반경이 2AU 인 원궤도를 100 주기만큼 적분하시오. 계산의 스텝 수를 20000 이내로 사용하시오. (10 점)

* 주기는 직접 계산합니다.

* 답안은 계산이 끝난 시점을 기준으로 다음의 값을 출력해 제출합니다.

* 소스코드의 출력 값과 답안 제출 값이 일치해야 합니다.

(출력문): 현재 step (정수형), 현재 시간 (second) (실수형), 현재 두 별 사이 거리 $r$ (실수형)

1.3) 질량이 각각 1 태양질량, 궤도장반경이 2AU 인 원궤도를 100 주기만큼 적분하시오. 40000 스텝 이내로 계산을 완료하시오. (10 점)

(출력문): 현재 step, 현재 시간 (second), 현재 $r$

1.4 질량이 10 태양질량인 블랙홀과 2 태양질량인 중성자별이 100AU 만큼 떨어져 원운동하는 궤도를 계산하시오. 단, $N_{STEPS} \leq 20000$ (10 점)

(출력문): 현재 step, 현재 시간 (second), 현재 $r$

**문제 2: 타원 궤도 운동을 계산하시오.**

* 주기는 장반경에만 관계합니다.

* 근점에서는 상호중력이 강하고 속도가 빠르기 때문에 더 작은 시간 간격이 필요하고 원점에서는 상대적으로 큰 시간간격을 사용해도 무방합니다. 이를 고려하여 효율적인 시간 간격을 사용하세요.

2.1) 질량이 각각 1 태양질량이고 궤도장반경이 2AU, 궤도이심률이 0.5 인 타원 궤도를 100 주기만큼 적분하시오. 단, $N_{STEPS} \leq 40000$ (15 점)

(출력문): 현재 step, 현재 시간 (second), 현재 $r$

2.2) 태양에 대한 헬리 혜성의 궤도를 50 주기 동안 적분하시오. 헬리 혜성의 정보는 다음을 참고하시오. 단, $N_{STEPS} \leq 40000$ (15 점)

궤도장반경: 17.8 AU, 궤도이심률: 0.967, 혜성질량: $2.22 \times 10^{17}$g

(출력문): 현재 step, 현재 시간 (second), 현재 $r$

**문제 3: 중력파에 의해 변화하는 궤도운동을 계산하시오.**

속도가 빛의 속도에 가까워질수록 상대론적 효과에 의해 질량을 가진 물체의 움직임은 뉴턴역학에서 멀어지게 된다. 상대론적 효과가 유효하지만 아직 안정적인 궤도를 유지하는 경우는 포스트 뉴토니안 (Post-Newtonian, PN)근사를 통해 궤도를 계산할 수 있다. PN 근사는 $1/c^2$에 대해 1 차부터 고차까지 전개할 수 있는데, 그 중에서 중력파에 의한 에너지 방출과 그에 의한 궤도 장반경과 이심율의 변화는 주로 $1/c^5$ 즉 2.5 PN 항에 의해 결정된다.

이번 문제에서는 2.5PN 를 고려하여 쌍성 궤도를 보정하고 충돌에 이르는 시간을 계산해 보기로 한다. 이 경우 가속도는 뉴턴 중력에 의한 효과에 포스트 뉴토니안에 의한 가속도를 더한 값을 사용한다. 편의상 중력상수 G=1, 빛의 속도 $c$는 속도의 변환상수(문제 1.1)의 단위로 나타낸다. (예를 들면 변환상수가 100 km/s 일 경우, 코드 내에서 빛의 속도는 2999.72 이다.)

먼저 몇 가지 변수(total mass, symmetric mass ratio)를 다음과 같이 정의한다.

$M = m_1 + m_2,\ \eta = \frac{m_1 m_2}{M^2}$

$$\mathbf{a}_{pn} = \frac{m_j}{r^2}\left(A\frac{\mathbf{R}}{r} + B\mathbf{V}\right) \tag{3.1}$$

$A, B$는 PN 계수이다. 2.5 PN 만 고려하는 경우 $A$ 와 $B$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$A = \frac{8}{5}\eta\frac{M}{r}\dot{r}\left(\frac{17}{3}\frac{M}{r} + 3v^2\right) \tag{3.2}$$

$$B = -\frac{8}{5}\eta\frac{M}{r}\left(3\frac{M}{r} + v^2\right) \tag{3.3}$$

$r,v$ 는 두 별 사이 거리와 상대 속도의 크기이다. 두 별사이 거리 $r$ 의 시간에 따른 변화량은 속도벡터의 $r$ 방향 성분이며 다음과 같이 나타낼 수 있다. $\dot{r} = (\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})/r$

이제 수식 (2)와 같이 가속도의 1 차미분을 구해야 한다. 수식 (3.1)을 시간에 대해 미분하여 $\dot{\mathbf{a}}_{pn}$를 직접 구하시오. (여기에서 시간에 대한 변수는 $A, B, \mathbf{R}, \mathbf{V}, r$ 이므로 이에 유의하시오.)

$$\dot{\mathbf{a}}_{pn} =$$

$\dot{A}$와 $\dot{B}$는 수식 (3.2)와 (3.3)을 미분하여 구할 수 있다. $\ddot{r}$은 $r$ 의 시간에 대한 2 차 미분으로 다음과 같이 주어진다. $\ddot{r} = (v^2 + \mathbf{R}\cdot\mathbf{a} - \dot{r}^2)/r$. $\dot{B}$가 다음과 같이 주어질 때, $\dot{A}$를 구하시오.

$$\dot{A} =$$

$$\dot{B} = \frac{8}{5}\eta\frac{M}{r^2}\dot{r}\left(3\frac{M}{r} + v^2\right) - \frac{8}{5}\eta\frac{M}{r}\left(-3\frac{M}{r^2}\dot{r} + 2\mathbf{V}\cdot\mathbf{a}\right)$$

3.1) 질량이 각각 10 태양질량인 블랙홀 두 개가 궤도장반경 $2 \times 10^{-5}$AU 인 원 궤도를 돌고 있다. 이 경우 중력파에 의해 두 블랙홀 사이의 거리가 슈바르츠실트 반경 이하로 갈 때까지 적분하고 충돌 시간을 구하시오. 단, 100 만 스텝 이하로 계산을 마칠 것. (20 점)

* 슈바르츠 실트 반경: $2G(m_1 + m_2)/c^2$

* 문제 1, 2 의 계산을 수월하게 하기 위해 PN 계산을 켜고 끄는 옵션을 적용합니다.

* 계산이 중간에 종료되는 것을 막기 위해 입력 변수의 계산 주기 수를 충분히 크게 설정합니다.

(출력문): 현재 step, 현재 시간 (second), 현재 $r$

3.2) 질량이 10 과 2 인 블랙홀과 중성자별의 쌍성이 궤도장반경 $2 \times 10^{-5}$AU, 궤도이심률이 0.8 인 타원 궤도를 돌고 있다. 이 경우 블랙홀과 중성자별 사이의 거리가 슈바르츠실트 반경이하로 갈 때까지 적분하고 충돌 시간을 구하시오. 단, 100 만 스텝이하로 계산을 마칠 것. (20 점)

(출력문): 현재 step, 현재 시간 (second), 현재 $r$