[문제 1번] 편미분 방정식 수치해석을 위한 멀티그리드 방법 구현 및 응용

- 총점: 100점
- 풀이방법: 문제에서 정의된 입력에 대해 올바른 출력을 하는 프로그램을 작성하여 소스코드를 제출하시오.
- 코드 작성시 유의사항
  - 사용 가능한 언어: C / Fortran
  - 지정 컴파일러: GCC 11.2.0
  - 템플릿 코드가 제공된다. (C 코드로 제공)
  - `Makefile` 은 C와 Fortran에 대해 각각 제공되며 수정이 불가하다.
  - 외부 라이브러리는 사용이 불가하다. 하지만 직접 소스 코드를 추가하여 사용하는 것은 가능하다.
  - 문제에 제시된 수치해석 방법이 아닌 다른 방법으로 코드를 작성할 경우 실격된다.
  - 모든 프로그램은 10초 이내에 출력을 완료하고 종료되어야 하며 이를 초과할 경우 실격 처리된다.
- 코드 제출시 유의사항
  - 제출 코드는 다음의 파일 명을 가진다.
    - 1번 문제: `main1.c`
    - 2번 문제: `main2.c`
    - 3번 문제: `main3.c`
    - 4번 문제: `main4.c`
    - 5번 문제: `main5.c`
    - Fortran의 경우는 확장자가 `f90` 이다.
  - 각 문제별 C 와 Fortran 중 하나의 소스코드만 제출한다.
  - 소스코드는 다음과 같이 git을 통해 제출한다.

```
$ git add .
$ git commit -m "I have solved all problems"
$ git push
```

- 제공 시스템
  - CPU: Intel Xeon E5-2650 v3 2.3GHz 1 cores
  - Memory: 2 GB
  - 운영체제: Centos Linux 7.8
  - 채점은 제공된 시스템과 동일한 환경에서 진행된다.

1-1. [20점] Iterative Relaxation

다음의 미분방정식과 경계조건을 만족하는 함수 $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ 의 수치해를 구하는 프로그램을 작성하시오.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g(x)$$

$$\begin{cases} f(a) = u \\ f(b) = v \end{cases}$$

이를 위해 다음과 같은 Cartesian 그리드를 도입한다.

- CartesianGrid (N, x, a, b)
  - 셀의 갯수: N
  - 영역: $x \in [a, b]$
  - 셀의 크기: $h \equiv (b - a)/N$
  - 점들의 좌표: $x_i \equiv a + ih$ (여기서 i 는 $0 \le i \le N$ 를 만족하는 정수)
  - f의 이산화: $f_i \equiv f(x_i)$
  - g의 이산화: $g_i \equiv g(x_i)$

미분방정식의 미분연산자는 다음과 같이 2차 유한차분법을 적용한다.

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_i} = \frac{1}{h^2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) + O(h^2)$$

입력으로 u, v 와 g_i 가 주어 졌을 때 주어진 방정식과 경계조건을 만족하는 수치해 f_i 를 출력한다. 출력된 f_i 는 normalized residual에 대한 rms(root mean square)가 10^{-15} 이하가 되어야 한다. 수치방법으로는 iterative relaxation 방법을 이용하며 Gauss-Seidel, Jacobian, Red-Black 방법들 중 계산 성능이 가장 좋은 방법을 택하여 실행 시간을 최소화 한다.

입력 파일 형식

- 파일명: `input.txt`

```
u v
N a b
g[1] ... g[N-1]
```

- 입력 범위
  - $2 \le N \le 600$
  - $a < b$

출력 파일 형식

- 파일명: `output.txt`

```
N a b
f[0] f[1] ... f[N]
```

채점

- 프로그램의 실행 시간을 기준으로 점수를 산정한다.
- 점수산정
  - 프로그램의 실행 시간: t
  - 다양한 N 에 대해 t 를 측정한 뒤 $\alpha + \beta N$ 로 least square fitting을 하여 α, β 를 구한다.
  - 모범 답안의 실행 시간 = $\alpha_0 + \beta_0 N$
  - 점수 = $20 \times \min\left[\max\left[\beta_0/\beta, 0\right], 1\right]$

1-2. [10점] Interpolation

CartesianGrid (N, x, a, b) 상의 f_i^N 가 입력으로 주어졌을 때 CartesianGrid $(2N, x, a, b)$ 으로의 linear interpolation f_i^{2N} 를 출력하는 프로그램을 작성하시오.

입력 파일 형식

- 파일명: `input.txt`

```
N a b
f[0] f[1] ... f[N]
```

- 입력 범위
  - $a < b$

출력 파일 형식

- 파일명: `output.txt`

```
2*N a b
f[0] f[1] ... f[2*N]
```

채점

- 프로그램의 수렴성을 기준으로 점수를 산정한다.
- 점수산정
  - 프로그램의 출력: f_i^N
  - exact error : $e_i^N \equiv f(x_i) - f_i^N$
  - exact error에 대한 rms 평균: $e_{\mathrm{rms}}^N \equiv \sqrt{\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(e_i^N\right)^2} \propto N^{-2}$
  - 다양한 N에 대해 e_{rms}^N을 측정한 뒤 αN^{β} 로 least square fitting을 하여 α, β를 구한다.
  - 모범답안의 $e_{\mathrm{rms}}^N = \alpha_0 N^{\beta_0}$
  - 점수 = $10 \times \min(\alpha_0/\alpha, 1) \times \min(|\beta_0 + 2| / |\beta + 2|, 1)$

1-3. [10점] Restriction

CartesianGrid (N, x, a, b) 상의 f_i^N 가 입력으로 주어졌을 때 CartesianGrid $(N/2, x, a, b)$ 으로의 full weighting restriction $f_i^{N/2}$ 를 출력하는 프로그램을 작성하시오. 입력으로 들어오는 그리드 셀의 갯수 N 은 짝수로 제한한다.

입력 파일 형식

- 파일명: `input.txt`

```
N a b
f[0] f[1] ... f[N]
```

- 입력 범위
  - N 은 짝수
  - $a < b$

출력 파일 형식

- 파일명: `output.txt`

```
N/2 a b
f[0] f[1] ... f[N/2]
```

채점

- 프로그램의 수렴성을 기준으로 점수를 산정한다.
- 점수산정
  - 프로그램의 출력: f_i^N

- exact error : $e_i^N \equiv f(x_i) - f_i^N$
- exact error에 대한 rms 평균: $e_{\text{rms}}^N \equiv \sqrt{\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(e_i^N\right)^2} \propto N^{-2}$
- 다양한 N에 대해 e_{rms}^N을 측정한 뒤 αN^{β} 로 least square fitting을 하여 α, β를 구한다.
- 모범답안의 $e_{\text{rms}}^N = \alpha_0 N^{\beta_0}$
- 점수 = $10 \times \min(\alpha_0/\alpha, 1) \times \min(|\beta_0 + 2| / |\beta + 2|, 1)$

1-4. [30점] Multigrid Method

앞선 문제에서 작성한 코드들을 이용해 multigrid 방법을 구현하시오. 미분 방정식과 경계조건 및 입력과 출력은 문제1번과 동일하다. 다만 입력으로 들어오는 그리드 셀의 갯수는 $N = 2^n$ (여기서 n 은 자연수)으로 제한한다. 또한 relaxation과 cycle 방식 및 pre & post relaxation 횟수 등을 조절해 실행 시간을 최소화 한다.

입력 파일 형식

- 파일명: `input.txt`

```
u v
N a b
g[1] ... g[N-1]
```

- 입력 범위
  - $N = 2^n$
  - $1 \le n \le 19$
  - $a < b$

출력 파일 형식

- 파일명: `output.txt`

```
N a b
f[0] f[1] ... f[N]
```

채점

- 프로그램의 실행 시간을 기준으로 점수를 산정한다.
- 점수산정
  - 프로그램의 실행 시간: t
  - 다양한 N 에 대해 t 를 측정한 뒤 $\alpha + \beta N$ 로 least square fitting을 하여 α, β 를 구한다.
  - 모범 답안의 실행 시간 = $\alpha_0 + \beta_0 N$

- 점수 = $30 \times \min\left[\max\left[\beta_0/\beta, 0\right], 1\right]$

1-5. [30점] Black Hole

다음의 Lichnerowicz 방정식과 Einstein-Rosen Bridge 경계조건을 만족하는 conformal factor $\Psi\left(r\right) : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$ 의 수치해를 구하는 프로그램을 작성하시오.

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Psi}{dr} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dr} + \frac{1}{2a}\Psi = 0 & : r = a \\ \\ \Psi = 1 + \frac{a}{b} & : r = b \end{cases}$$

이를 위해 CartesianGrid $\left(N, r, a, b\right)$ 을 도입한다. 미분방정식의 미분연산자는 다음과 같이 2차 유한차분법을 적용한다.

$$\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{r_i} = \frac{1}{h}(\Psi_{i+1} - \Psi_{i-1}) + O\left(h^2\right)$$

$$\left.\frac{d^2\Psi}{dr^2}\right|_{r_i} = \frac{1}{h^2}(\Psi_{i+1} + \Psi_{i-1} - 2\Psi_i) + O\left(h^2\right)$$

$r = a$ 경계조건에서는 다음의 2차 유한차분법을 적용한다.

$$\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{a} = \frac{1}{h}\left(-\frac{3}{2}\Psi_0 + 2\Psi_1 - \frac{1}{2}\Psi_2\right) + O\left(h^2\right)$$

입력으로 N, a, b 가 주어 졌을 때 주어진 방정식과 경계조건을 만족하는 수치해 Ψ_i 를 출력한다. 출력된 Ψ_i 는 normalized residual에 대한 rms(root mean square)가 10^{-15} 이하가 되어야 한다. 수치방법으로는 multigrid 방법을 이용한다. 따라서 입력으로 들어오는 그리드 셀의 갯수는 $N = 2^n$ (여기서 n 은 자연수)으로 제한한다. 또한 relaxation과 cycle 방식 및 pre & post relaxation 횟수 등을 조절해 실행 시간을 최소화 한다. Ψ 의 초기값으로는 $1 + a/b$ 을 사용한다.

입력 파일 형식

- 파일명: `input.txt`

```
N a b
```

- 입력 범위

- $N = 2^n$
- $1 \leq n \leq 8$
- $a < b$

출력 파일 형식

- 파일명: `output.txt`

```
N a b
Psi[0] Psi[1] ... Psi[N]
```

채점

- 프로그램의 실행 시간을 기준으로 점수를 산정한다.
- 점수산정
  - 프로그램의 실행 시간: t
  - 다양한 N 에 대해 t 를 측정한 뒤 $\alpha + \beta N$ 로 least square fitting을 하여 α, β 를 구한다.
  - 모범 답안의 실행 시간 = $\alpha_0 + \beta_0 N$
  - 점수 = $30 \times \min\left[\max\left[\beta_0/\beta, 0\right], 1\right]$