

2025 수치상대론 및 중력파 여름학교
(2025.07.28~08.01, 한국천문연구원)

일반상대론 기초

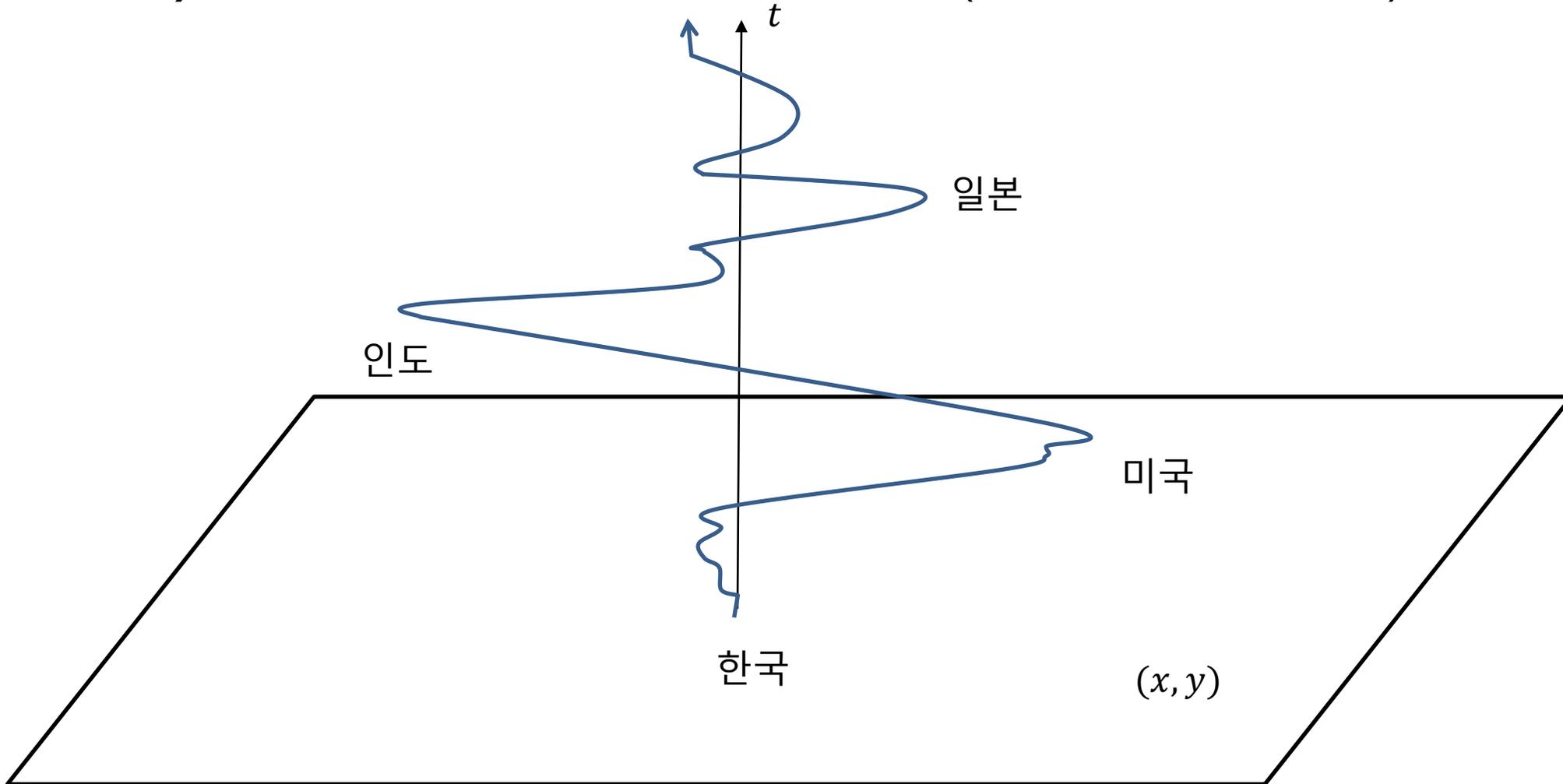
강공원

(중앙대 물리학과, gwkwang@cau.ac.kr)

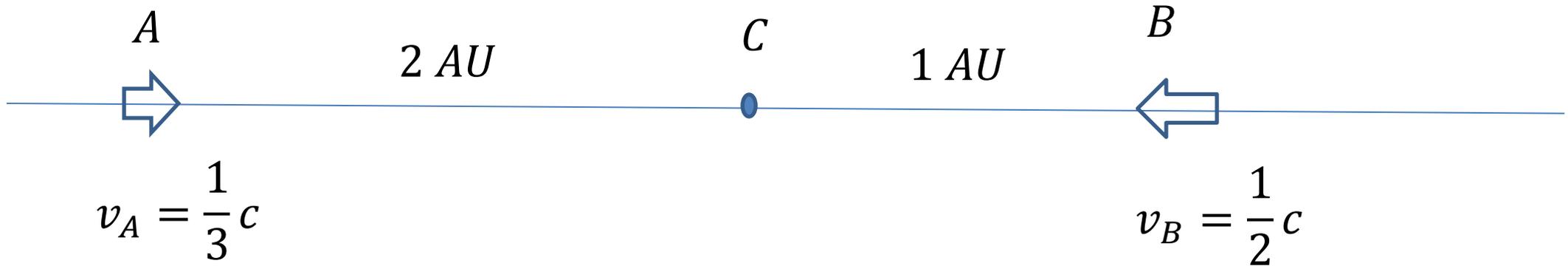
Homework Solution

Homework Problems

Prob.1) 본인의 세계선을 간략히 그리시오(탄생부터 현재까지).

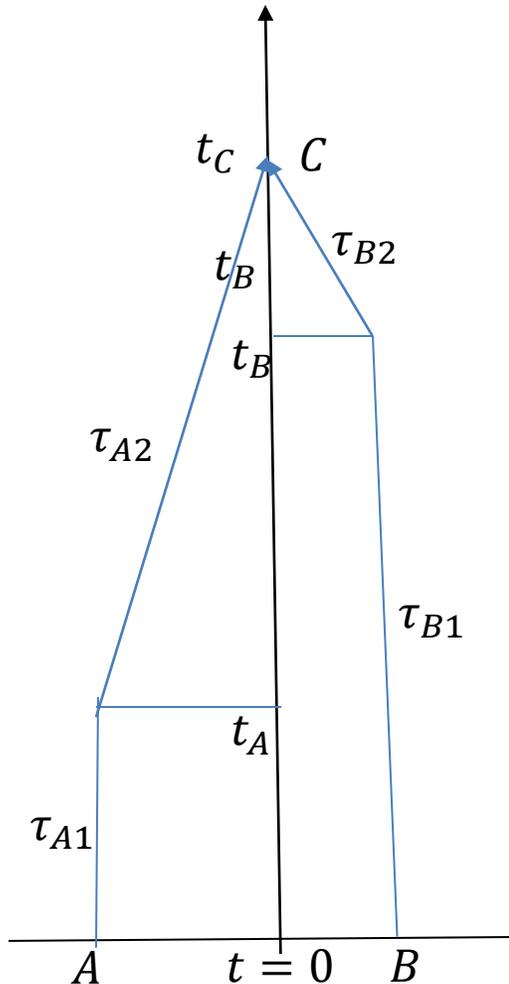


Prob.4) 우주에서 다음과 같이 C 지점에서 1시간(각자의 고유시간) 후 친구를 만나려면 A 출발 후 B는 언제 출발해야 하는가? (문제 수정: $8 AU \rightarrow 2 AU$, $6 AU \rightarrow 1 AU$)



i) 절대시공간일 경우: 빛의 속도로 $1 AU$ 거리를 가는데 8분 정도 걸리므로 $2 AU$ 일 경우 16분인데 A의 속도는 빛 속도의 $1/3$ 이므로 3배인 48분이 걸릴 것이다. 그러니 12분을 기다렸다가 출발하면 총 1시간 후 C에 도착할 것이다. 한편 B의 경우 우주선 출발 후 16분이 소요되므로 44분 기다렸다가 출발하면 역시 1시간 후 C에서 친구를 만나게 된다. 따라서 B는 A 출발 후 $44\text{분} - 12\text{분} = 32\text{분}$ 동안 다른 일을 하다가 출발하면 된다.

ii) 특수상대론적 시공간일 경우: A 가 우주선을 타고 움직이면 그의 고유 시간은 48분 보다 작아질 것이다. 그러니 12분 보다 좀 더 있다가 출발해야 한다.



$$\Delta t_{AC} = t_C - t_A = \frac{2 AU}{c/3} = 48 \text{ min.} = \frac{\tau_{A2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c/3}{c}\right)^2}} \rightarrow \tau_{A2} = 48 \text{ min.} \times \sqrt{8/9} = 45 \text{ min.}$$

따라서 A 는 3분이 더 긴 15분을 기다렸다가 출발해야 자기 시간으로 1시간 후 C 에 도착할 것이다. B 의 경우

$$\Delta t_{BC} = t_C - t_B = \frac{1 AU}{\frac{c}{2}} = 16 \text{ min.} = \frac{\tau_{B2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c/2}{c}\right)^2}} \rightarrow \tau_{B2} = 16 \text{ min.} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14 \text{ min.}$$

이므로 2분을 추가해서 A 출발 후 34분 후에 출발하면 자기 시간으로 1시간 후에 A 를 만나게 될 것이다.

Prob.5) Consider the reaction $A \rightarrow B + C$ with particle rest masses m_A , m_B and m_C , respectively.

a) If A is at rest in the lab frame, what is the momentum four-vector P_A^μ in the lab frame? Show also that, in this lab frame, particle B has an energy $E_B = (m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)/2m_A$.

b) If A decays while moving in the lab frame, find the relation between the angle θ at which B comes off, and the energies of A and B.



Sol) a) $P_A^\mu = (m_A, 0, 0, 0)$. 운동량 보존: $P_A = P_B + P_C = (E_B + E_C, \vec{P}_B + \vec{P}_C)$

$$\rightarrow E_B + E_C = m_A \quad \& \quad \vec{0} = \vec{P}_B + \vec{P}_C.$$

$$P_A \cdot P_A = (P_B + P_C) \cdot (P_B + P_C) = P_B \cdot P_B + 2P_B \cdot P_C + P_C \cdot P_C$$

$$\rightarrow -m_A^2 = -m_B^2 + 2(-E_B E_C + \vec{P}_B \cdot \vec{P}_C) - m_C^2 = -m_B^2 - m_C^2 - 2E_B(m_A - E_B) + 2\vec{P}_B \cdot (-\vec{P}_B)$$

$$= -m_B^2 - m_C^2 - 2E_B m_A + 2(E_B^2 - \vec{P}_B \cdot \vec{P}_B) = -m_B^2 - m_C^2 - 2E_B m_A + 2m_B^2$$

$$\therefore E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}$$

b) Note that $P_A = (E_A, \vec{P}_A)$, $P_B = (E_B, \vec{P}_B)$, $P_C = (E_C, \vec{P}_C)$. $P_C = P_A - P_B \rightarrow P_C \cdot P_C = P_A \cdot P_A -$

$$2P_A \cdot P_B + P_B \cdot P_B \rightarrow -m_C^2 = -m_A^2 - 2(-E_A E_B + \vec{P}_A \cdot \vec{P}_B) - m_B^2 = -m_A^2 - m_B^2 - 2(-E_A E_B +$$

$$|\vec{P}_A| |\vec{P}_B| \cos \theta) \rightarrow \cos \theta = \frac{m_B^2 - m_A^2 - m_B^2 + 2E_A E_B}{2|\vec{P}_A| |\vec{P}_B|}. \text{ Since } E_A^2 = m_A^2 + |\vec{P}_A|^2, |\vec{P}_A| = \sqrt{E_A^2 - m_A^2}.$$

$$\text{Thus, } \cos \theta = \frac{m_B^2 - m_A^2 - m_B^2 + 2E_A E_B}{2\sqrt{E_A^2 - m_A^2} \sqrt{E_B^2 - m_B^2}}.$$