2025 수치상대론 및 중력파 여름학교
(2025.07.28~08.01, 한국천문연구원)

# 일반상대론 기초

강 궁 원

(중앙대 물리학과, gwkang@cau.ac.kr)

# III. 블랙홀 시공간의 이해

# 목 차

# Part 1

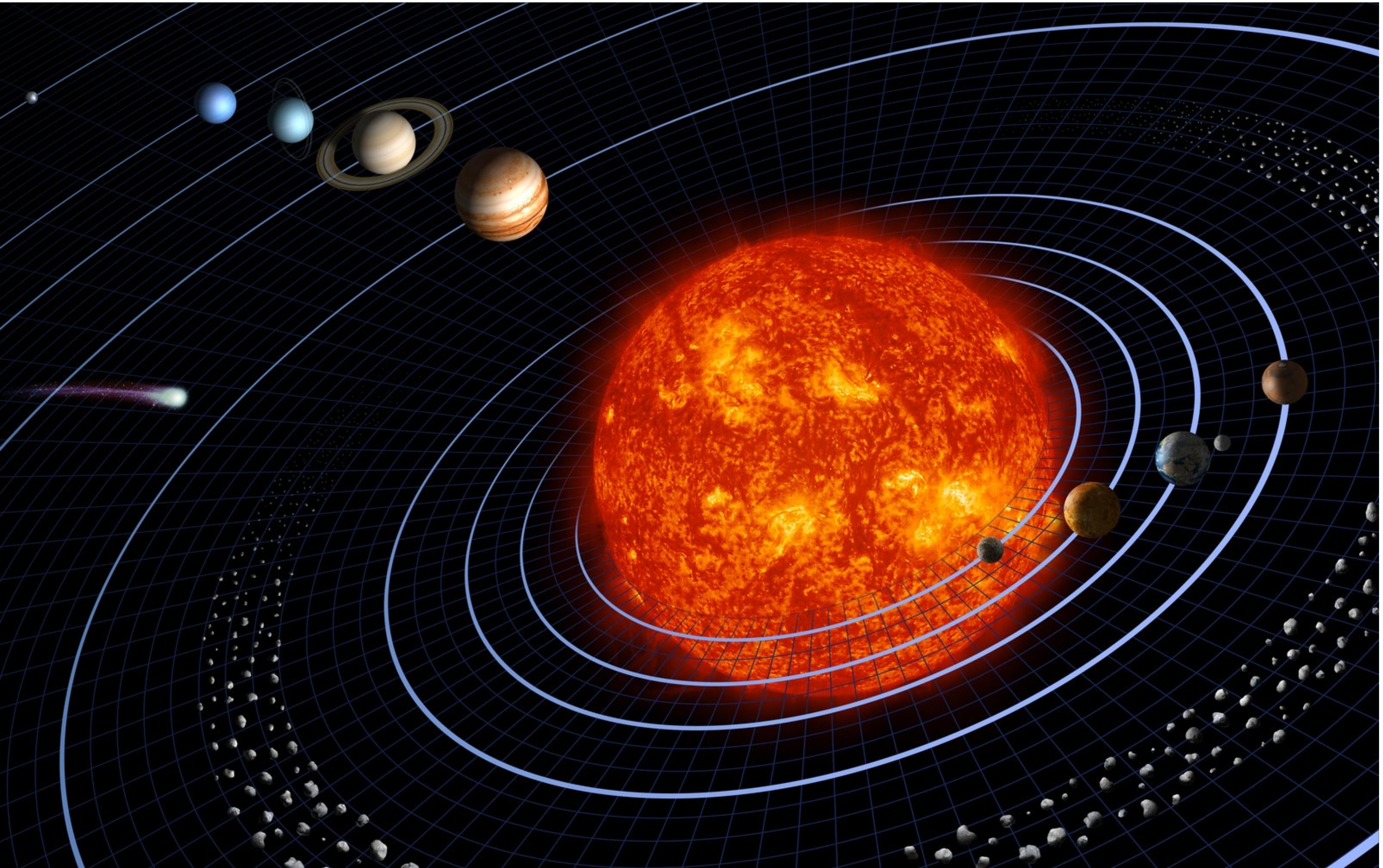
# 중력 수축과 블랙홀

# ✓ 별의 탄생과 중력 수축

- 용골자리 성운의 “우주절벽“(NGC 3324 in the Carina Nebula)
- 밀도(질량) 섭동: “별의 씨앗” ➔ 별의 형성

(그림 출처: NASA, ESA, CSA, and STScI)

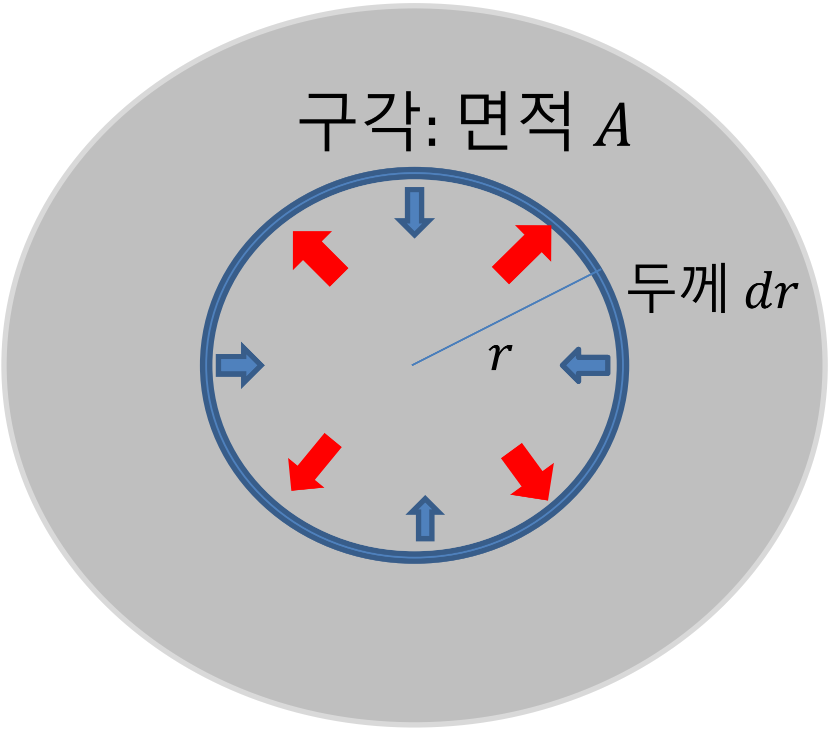
- **평형 상태의 별:**



- 태양, 지구, 화성, ….:
  안정적인 상태 ➔
  중력과 압력의 평형
  상태: "균형"
- 질량(M), 크기(R)

(출처: NASA/JPL)

- **중력 수축 vs 버티기:**




($\rho$: 질량 밀도, $P$: 압력,
$m$: 반경 $r$ 이내의 총 질량)

- "압력으로 버티기" = "중력으로 오그리기"

- **뉴튼 중력에서의 평형 상태:**

$$P' = \frac{dP}{dr} = -G\,\frac{\rho\, m(r)}{r^2}$$

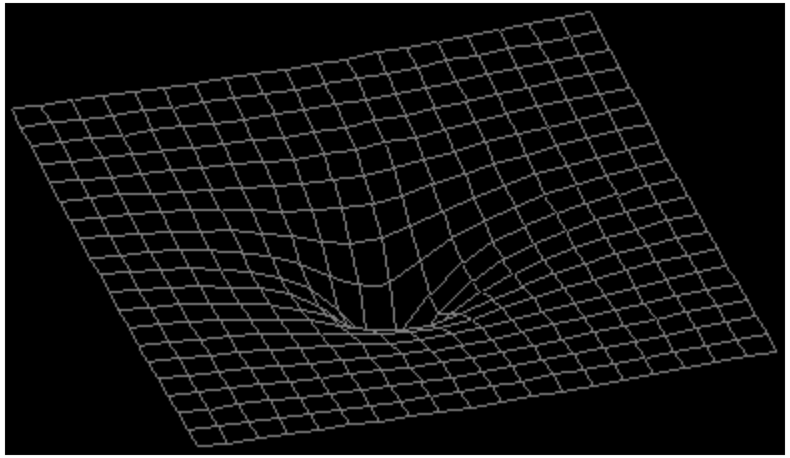
Or, $|dP| \times A = G\,\dfrac{(\rho A dr) \times m(r)}{r^2}$ :

**"구각을 밀어내는 압력"**

**= "구각을 당기는 중력"**

➔ 태양, 지구, "은하", … 등

- **일반상대론에서의 평형 상태:**



$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$

Ex) $$\frac{dP}{dr} = -G \frac{(\rho + P/c^2)\left[m + 4\pi r^3 P/c^2\right]}{r(r - 2Gm/c^2)}$$

➔ **뉴튼 중력보다 더 강한 인력현상 발생!!**

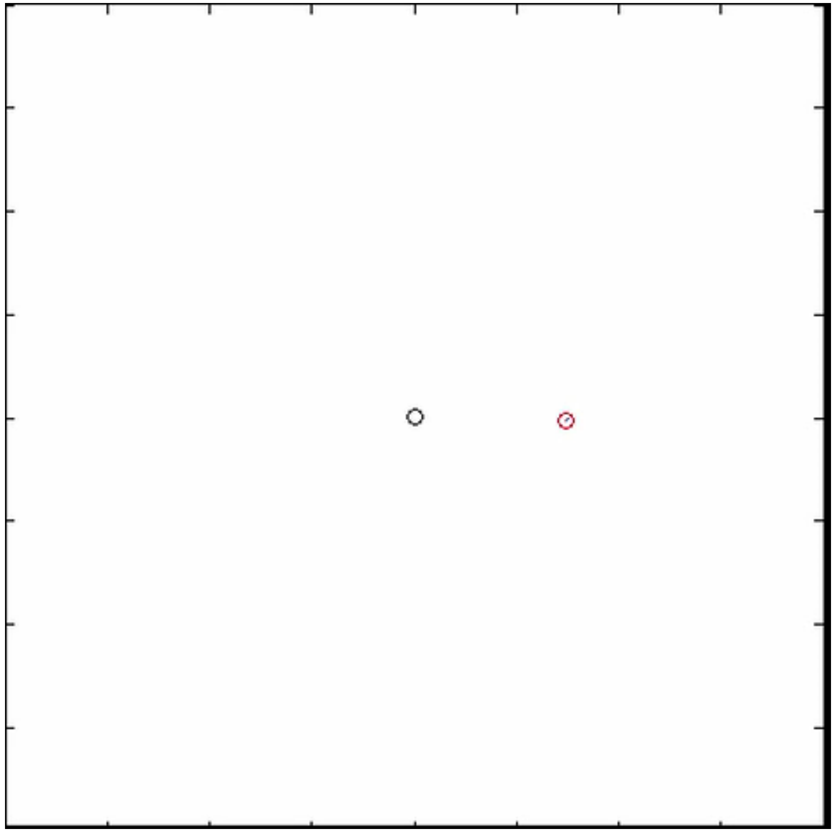
중성자별, 블랙홀, 은하핵, … 등

# • 뉴튼 중력과의 비교

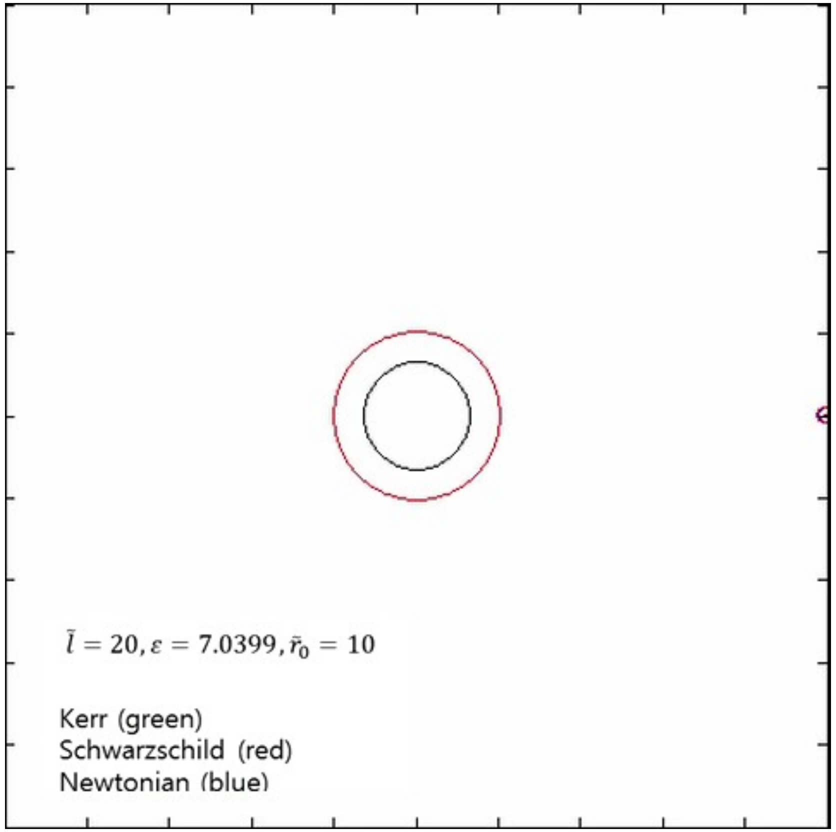
✓ **Numerical calculations for geodesics:**

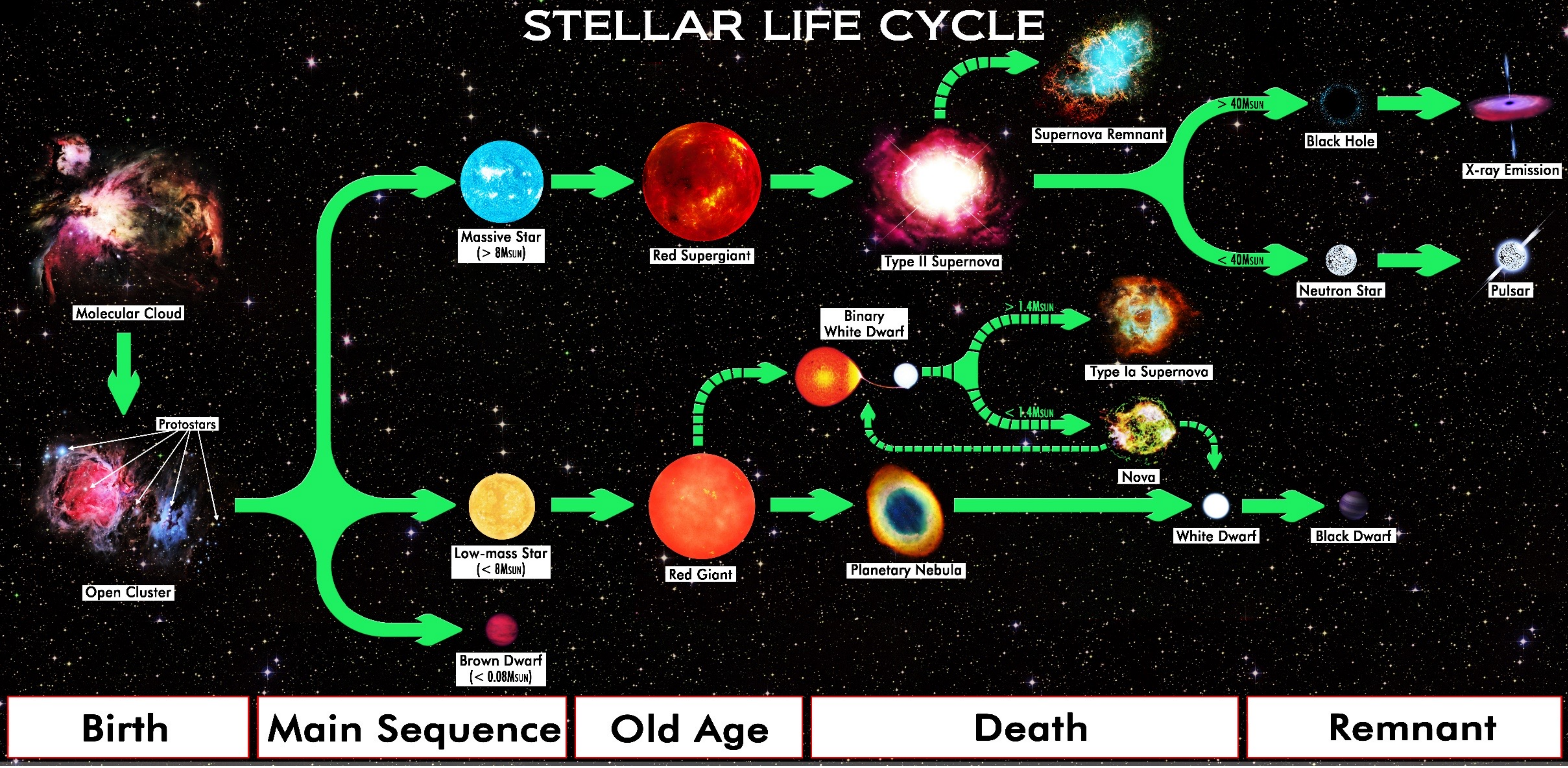
- Schwarzschild BH: 박관호, 박찬 & GK ('13)
- Kerr BH: 이승환 & GK ('14)

Bound motions



Strength of gravities





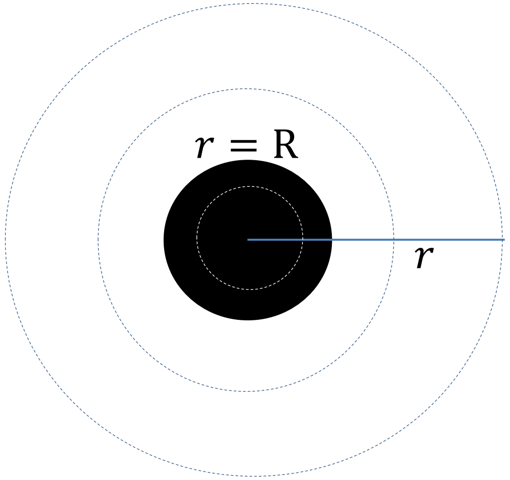

(출처: R.N. Bailey)

➔ 카오스 상대성 이론 8강 이창환(부산대 물리학과): 블랙홀 탄생의 순간을 볼 수 있을까?
( https://www.youtube.com/watch?v=V_XxC1vRZrE )

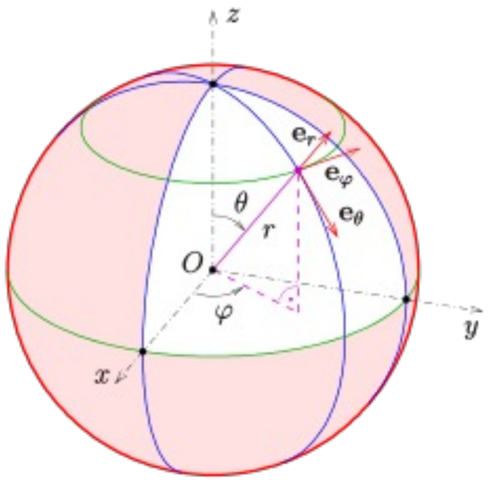
# Part 2

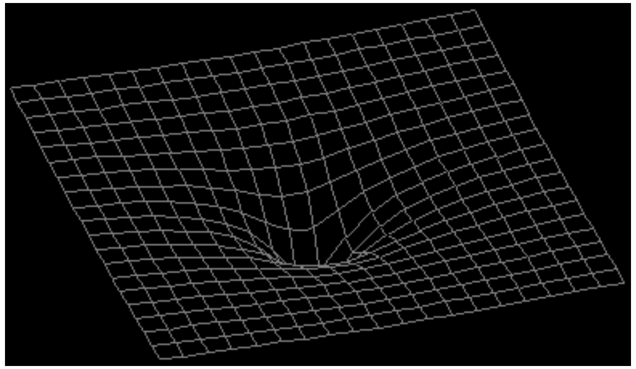
# 구 대칭 진공해(슈바르츠실트 메트릭)

# ✓ 구 대칭 진공해

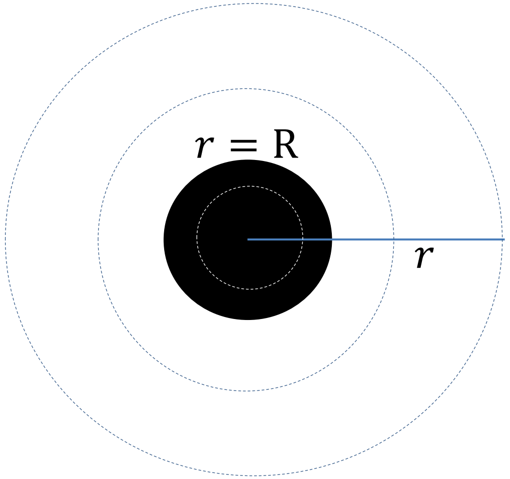


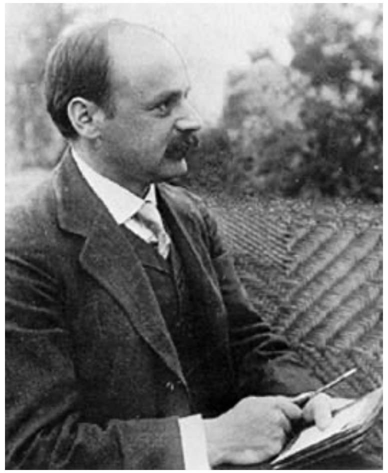

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$



$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{tt} dt^2 + 2 g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + \cdots$$



**Karl Schwarzschild (1873~1916)**

- **메트릭 추정(Metric ansatz):** 적절한 좌표를 도입해서 시간에 따라 변하지 않고(정적 상태) 구대칭을 반영하는 계량텐서를 아래와 같이 추정할 수 있음

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + \cdots$$

$$= -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

- **진공해**$(r > \mathrm{R})$: $T_{\alpha\beta} = 0$

➔ $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\cancelto{0}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_{\alpha\beta} = 0$

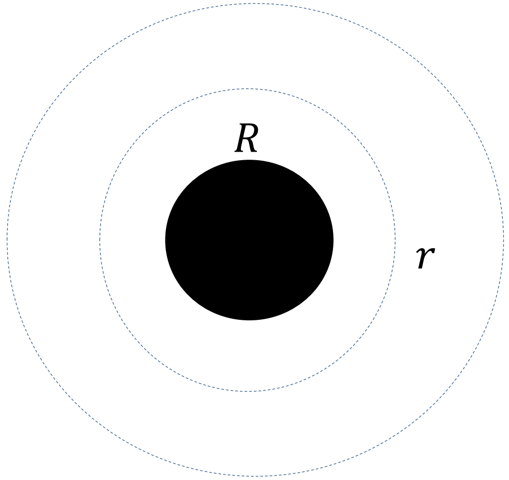
$$\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0\right) \times g^{\alpha\beta} \rightarrow R - \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot R = -R = 0$$

- **슈바르츠실트 메트릭(Schwarzschild Metric):**

$$R_{tt} = \frac{1}{4rfh^2}\left[-rhf'^2 + f(-rf'h' + 2h(2f' + rf''))\right] = 0$$

$$R_{rr} = \frac{1}{4rf^2h}[f(4f + rf')h' + rh(f'^2 - 2ff'')] = 0$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi}/\sin^2\theta = \frac{1}{2fh^2}[-rhf' + f(-2h + 2h^2 + rh')] = 0$$

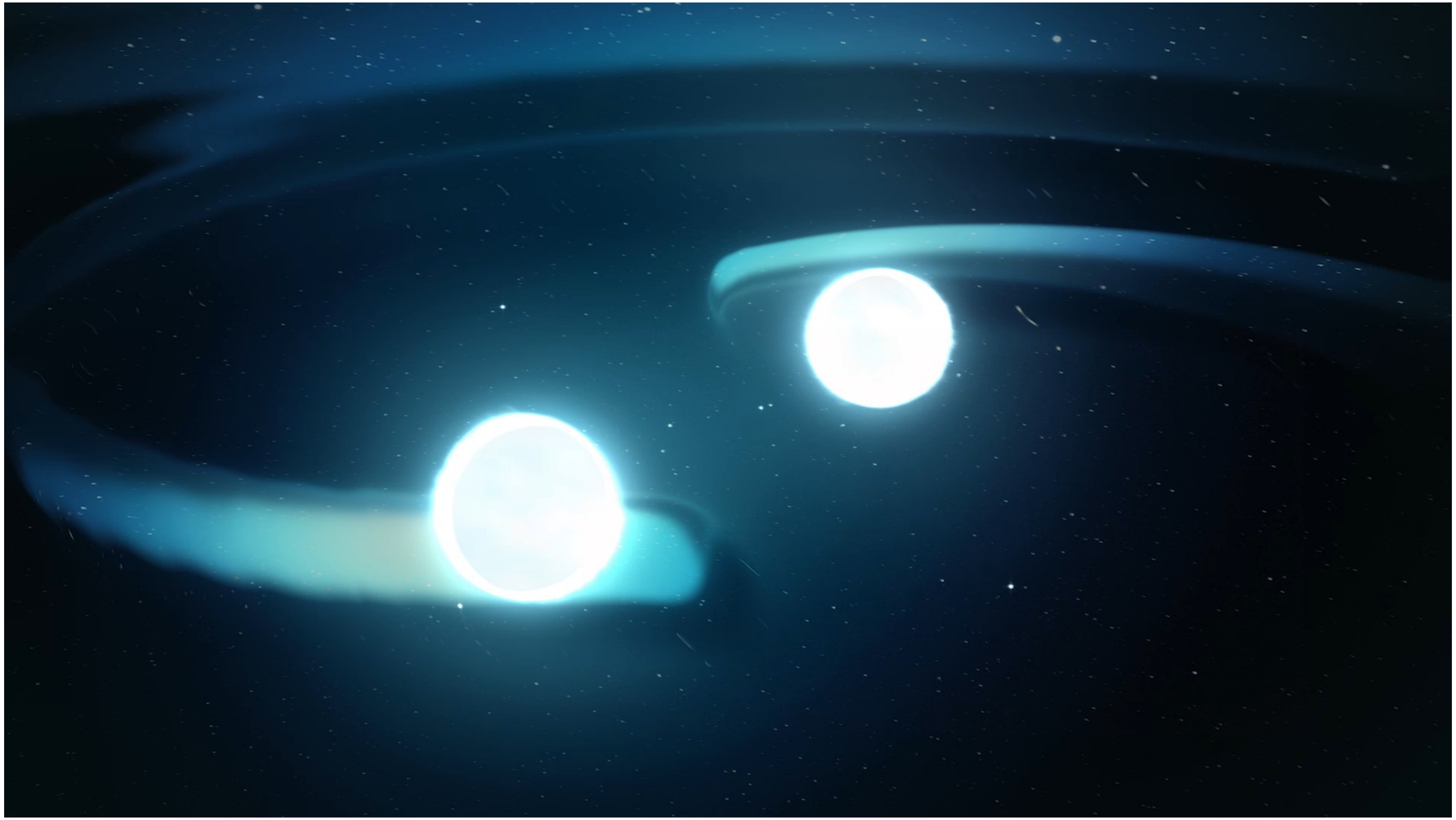



$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)d(ct)^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2}$$

$M$:

- $R \neq 0$ ➔ 중심 별의 질량
- $R = 0$ ➔ ADM 에너지(시공간 전체의 에너지)

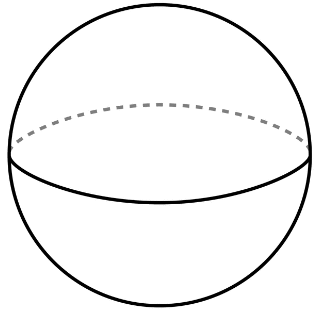
## ✓ 좀 더 일반적인 경우의 해: $g(t, x^i)$ ➔ 수치적인 해



중성자별 병합과 중력파-전자기파 발생
(Credit: LIGO/SXS/R.Hurt and T. Pyle)

# ✓ 슈바르츠실트 시공간의 성질:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2GM/(c^2 r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$



- $r \gg 2M$ 일 경우$(c = 1)$,

$$ds^2 \cong -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ➔ "편평한 시공간", *e.g.,* Asymptotically flat

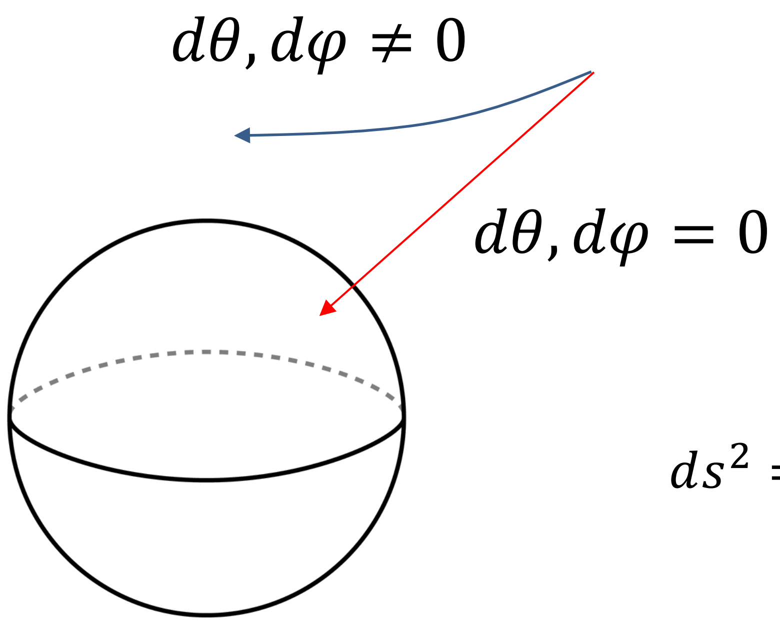
➔ $t$: $-\infty \sim \infty$, $r$: $0 \sim \infty$, $\theta$: $0 \sim \pi$, $\phi$: $0 \sim 2\pi$

- 곡률(Kretschman invariant):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48M^2}{r^6} \quad \rightarrow \quad \infty \quad \text{as} \quad r \rightarrow 0 \quad \text{only}$$

- $r = 0$ : 곡률 특이점(Curvature singularity)
- $r = 2M$ : 아마도 좌표 특이점(Coordinate singularity)
- $\theta = 0, \pi$ : 좌표 특이점

- **반경 방향으로 움직이는 빛의 경로:** $\theta, \varphi =$ 일정.




$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \\
&= -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/(c^2 r)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- **반경 방향으로 움직이는 빛의 경로:** $\theta, \varphi$ = 일정.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM/c^2}{r}\right) d(ct)^2 + \frac{1}{1-2GM/(c^2 r)} dr^2 = 0$$

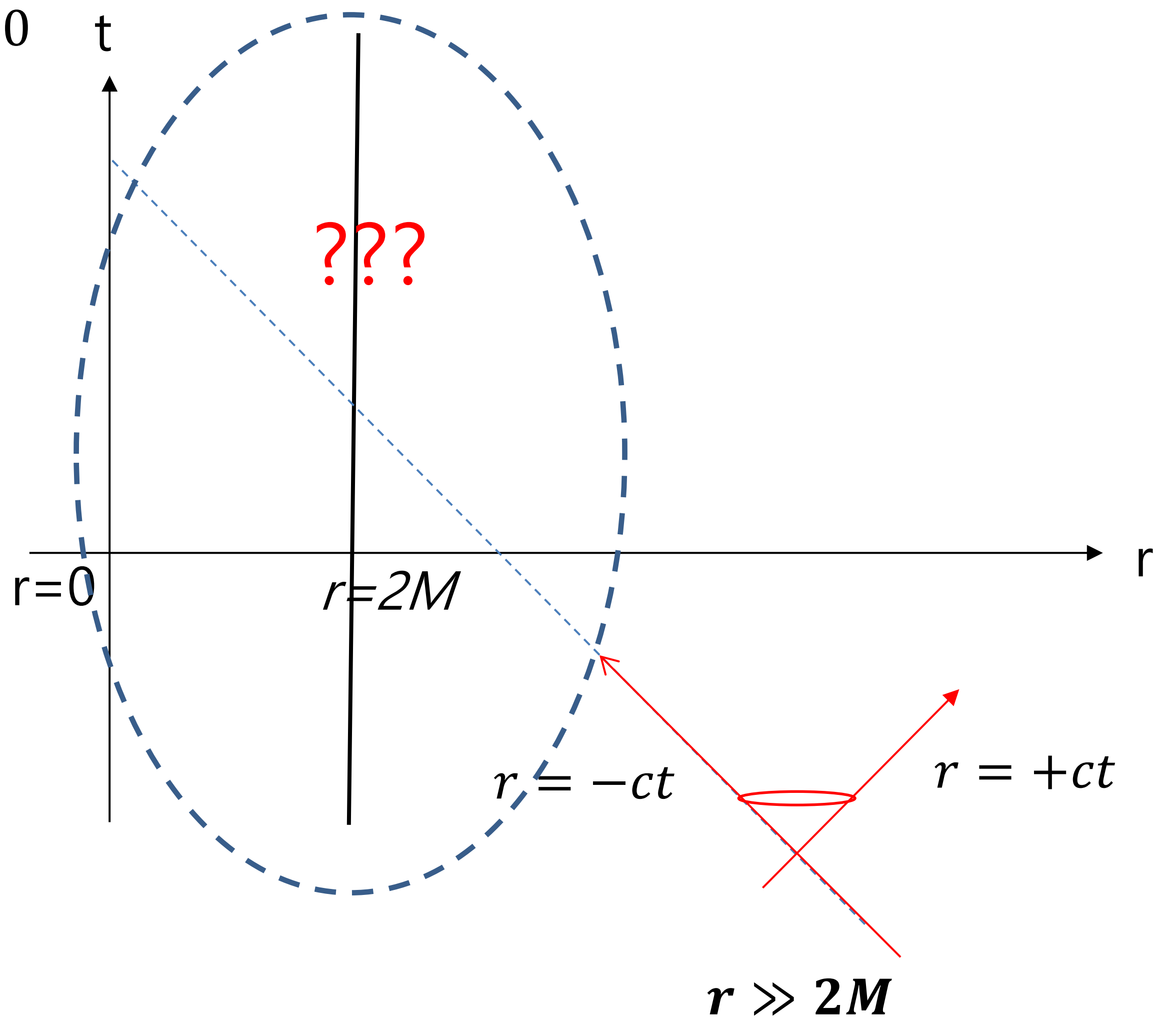
➔ $\frac{dr}{dt} = \pm c\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \xrightarrow{r \gg 2M} \pm c$ , or $r = \pm ct$

➔ $\frac{dr}{dt} = +c\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ : Out-going light,

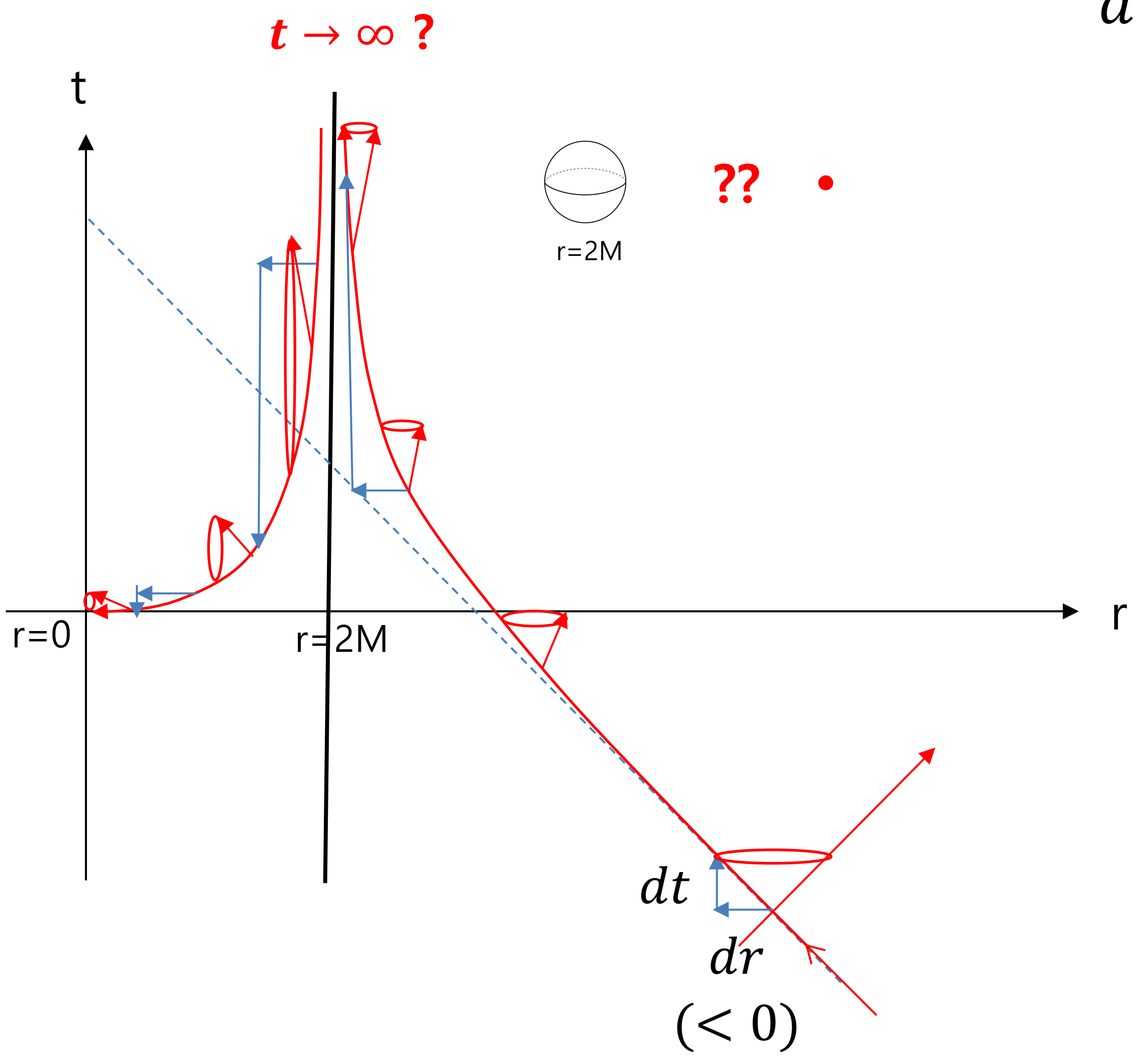
$\frac{dr}{dt} = -c\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ : In-going light

Note: $\frac{dr}{dt} = \pm c\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow 2M$ ......??

$\rightarrow \mp\infty$ $as$ $r \rightarrow 0$ ......??



- **광뿔 구조:** $G = 1 = c$




$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1-2M/r} dr^2 = 0$$

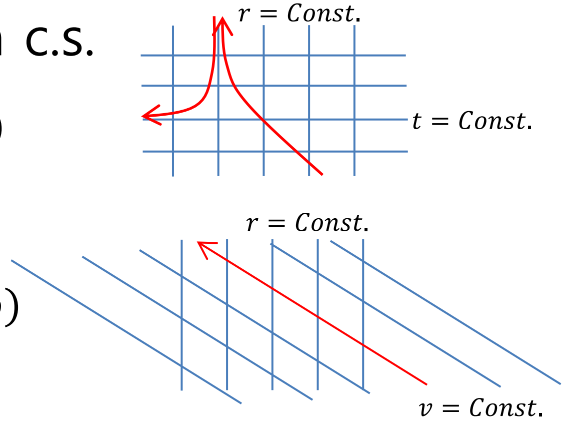
- **In-going light:** $\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \xRightarrow{r \gg 2M} -1,$

$\xRightarrow{r \sim 2M^+} -0, \quad \xRightarrow{r \sim 2M^-} +0, \quad \xRightarrow{r \sim 0} +\infty$

- **Out-going light:** $\frac{dr}{dt} = +\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \xRightarrow{r \gg 2M} +1,$

$\xRightarrow{r \sim 2M^+} +0, \quad \xRightarrow{r \sim 2M^-} -0, \quad \xRightarrow{r \sim 0} -\infty$

## - $(v, r)$ **coordinate system:** Edington-Finkelstein c.s.

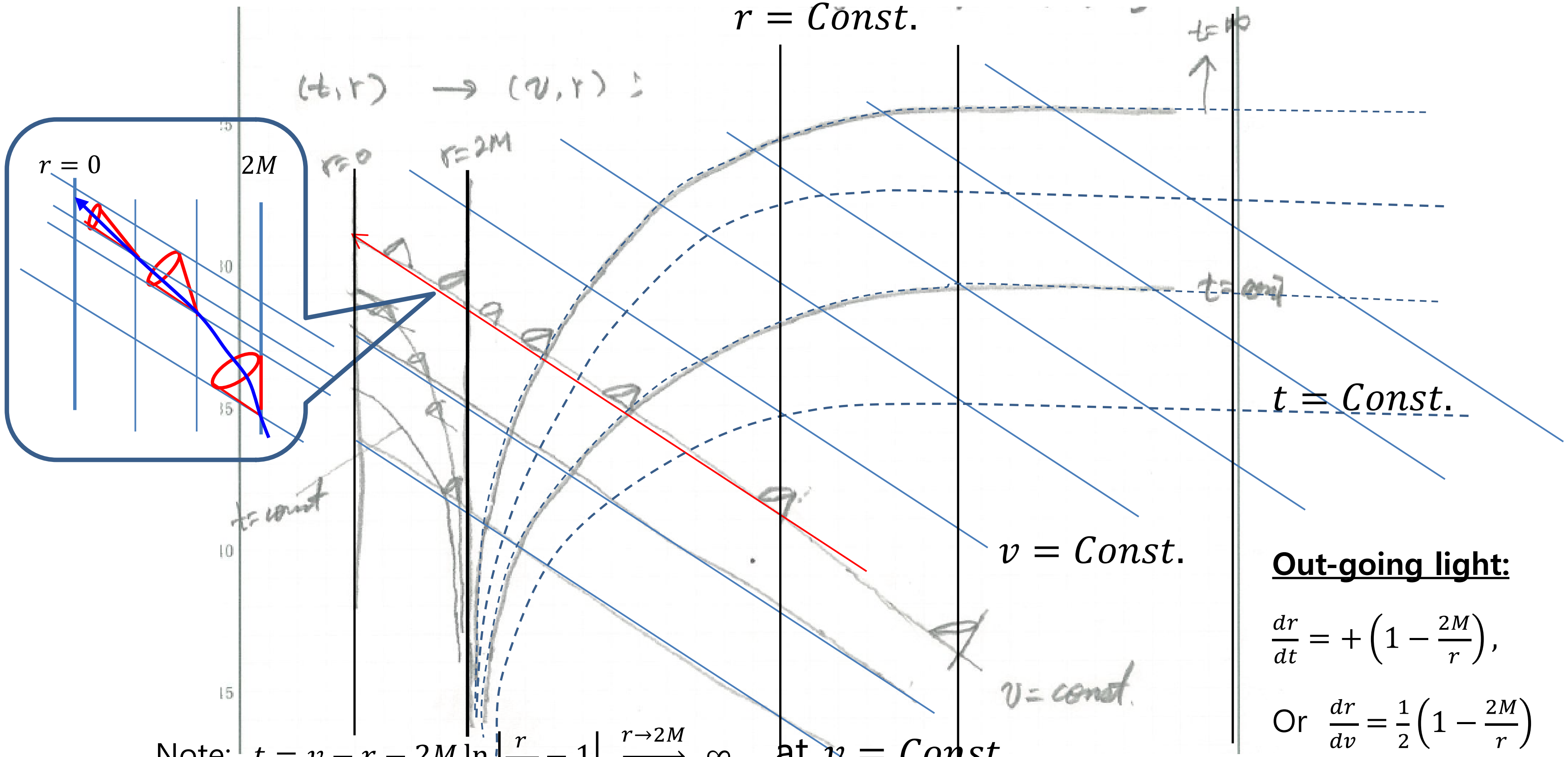



$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad \text{in } (t, r, \theta, \varphi)$$

$$= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv\left(dv - \frac{2dr}{1-\frac{2M}{r}}\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$= -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dv\,dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad \text{in } (v, r, \theta, \varphi)$$

$$v = t + r + 2M\ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right| \xrightarrow{r \gg 2M} t + r \quad \text{or} \quad t = -r + v$$




$v = Const.$

**Out-going light:**

$\frac{dr}{dt} = +\left(1-\frac{2M}{r}\right)$,

Or $\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)$

Note: $t = v - r - 2M\ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right| \xrightarrow{r \to 2M} \infty$ at $v = Const.$

- **$r = 2M$ 부근의 인과율:**

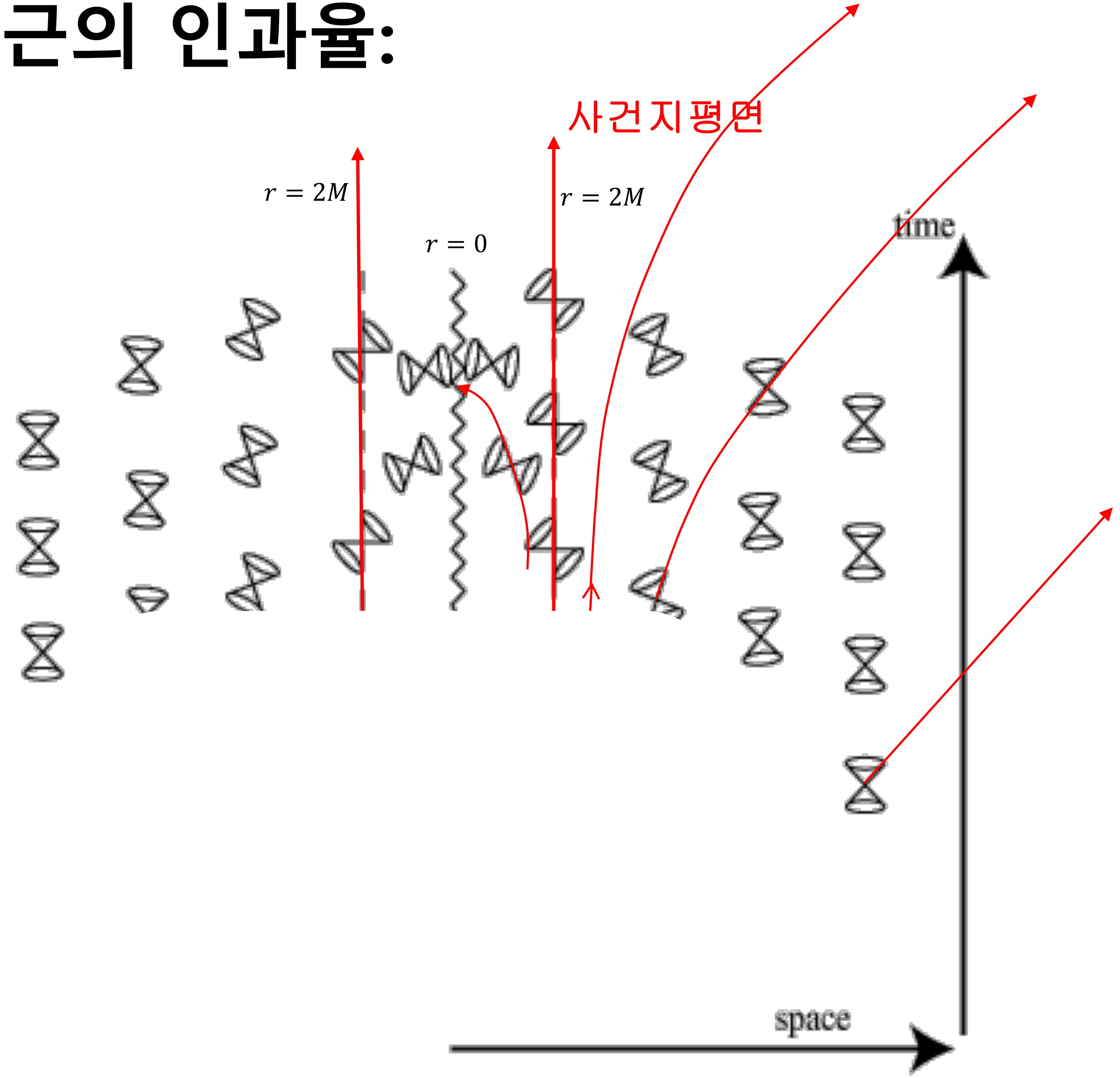
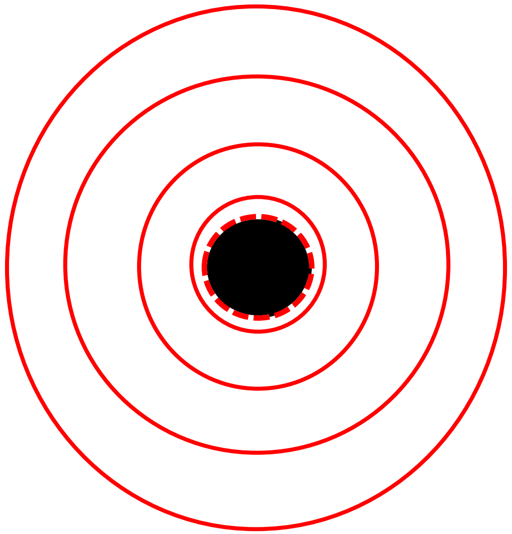
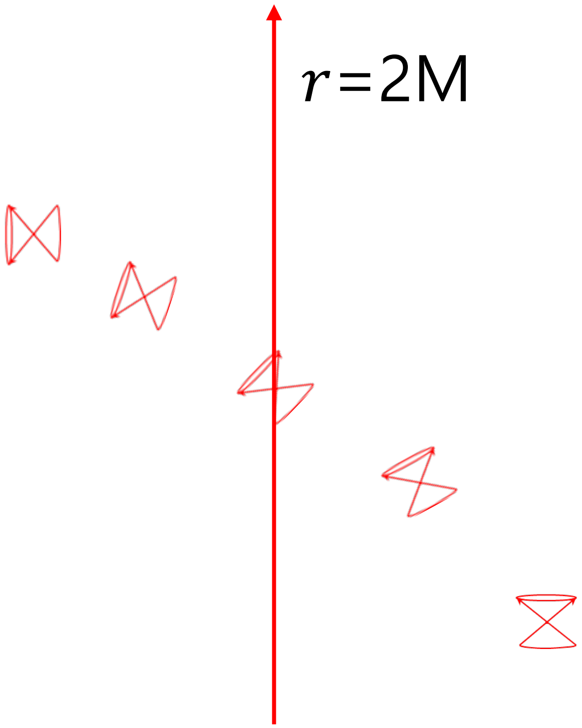



그림 출처: http://plato.stanford.edu/entries/spacetime-singularities/lightcone.html

- "**사건 지평면(EVENT HORIZON)**":
  - 빛이 $r = r_h = 2M$ 구면을 탈출하지 못한다 ...?!
  - Horizon radius: $r_h = 2M = \frac{2GM}{c^2} \sim 3 \frac{M}{M_\odot}$ km





- **Kruskal-Szekeres 좌표(1960):**

$$\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M}=X^2-T^2 \quad \& \quad \frac{t}{2M}=2\tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right)$$

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$$=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}(-dT^2+dX^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)$$

$$\left(\frac{r}{2M}-1\right)e^{r/2M}=X^2-T^2 \quad \& \quad \frac{t}{2M}=2\tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right)$$

여기서 $r=r(T,X)$

$t: -\infty \sim \infty$
$r: 0 \sim \infty$

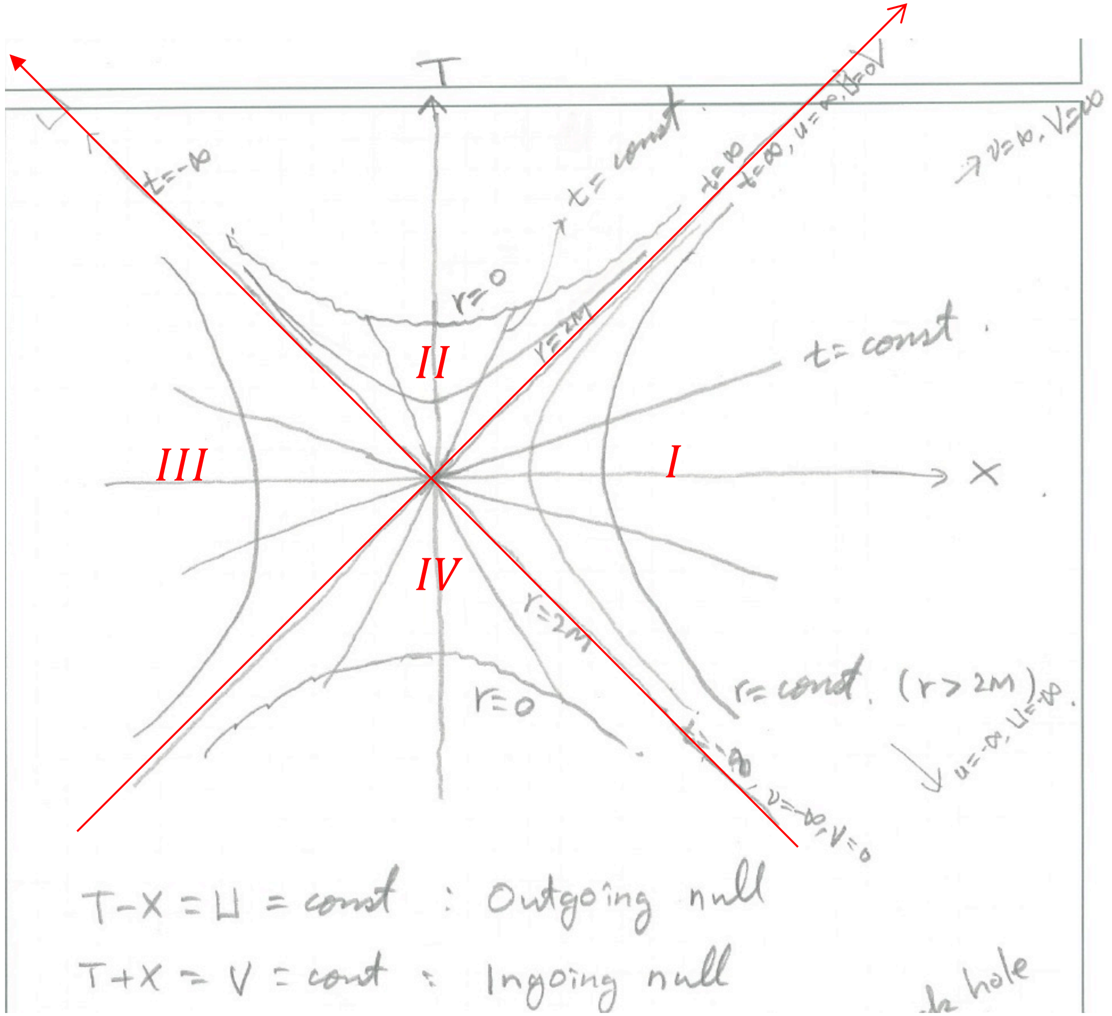
⬇

$I$: $t: -\infty \sim \infty \;\&\; r: 2M \sim \infty$ ➔ 블랙홀 밖

$II$: $t: -\infty \sim \infty \;\&\; r: 2M \sim 0$ ➔ 블랙홀 영역

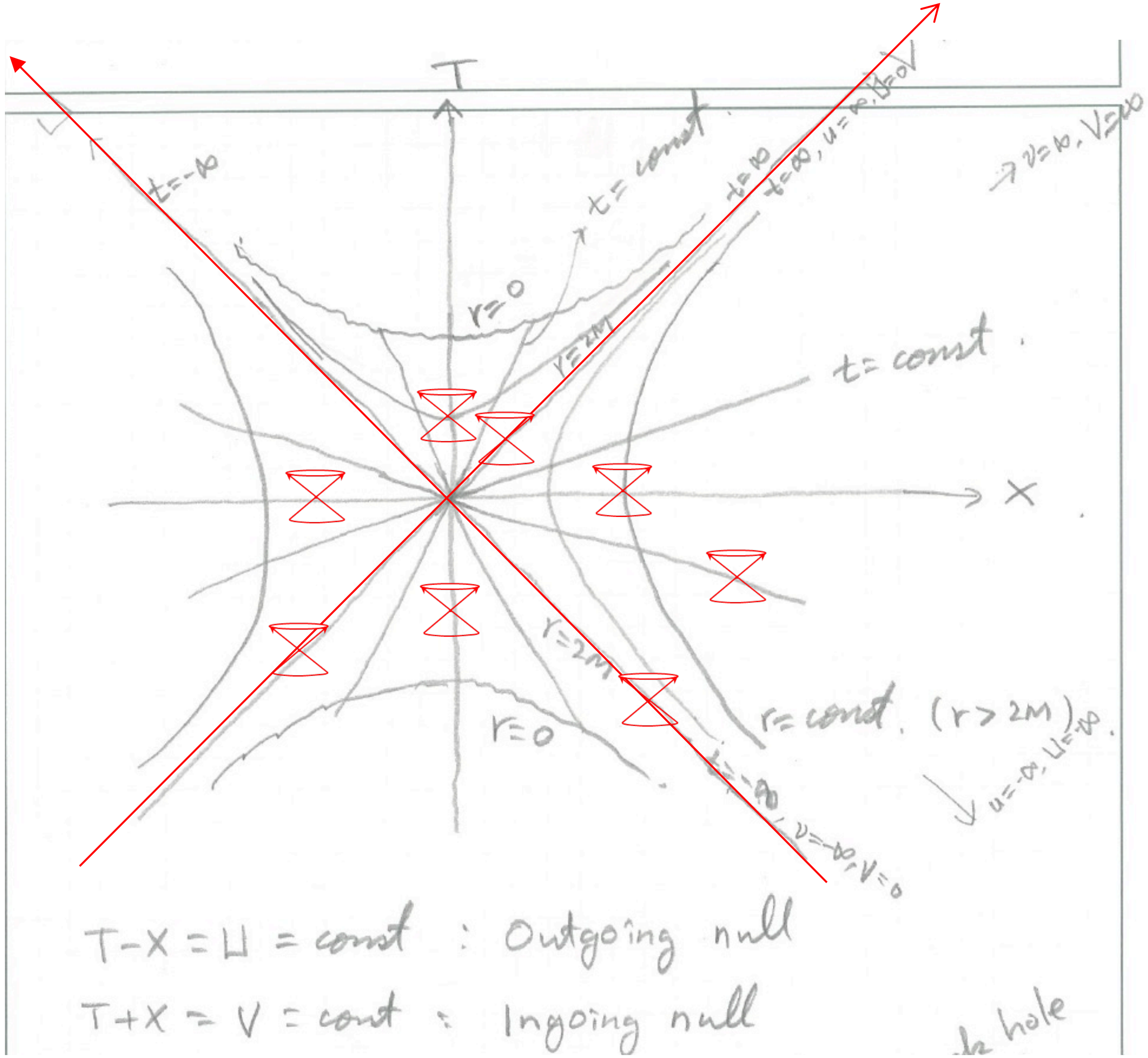
$III$: $t: \infty \sim -\infty \;\&\; r: 2M \sim \infty$ ➔ 또 다른 세상

$IV$: $t: \infty \sim -\infty \;\&\; r: 0 \sim 2M$ ➔ 화이트홀 영역

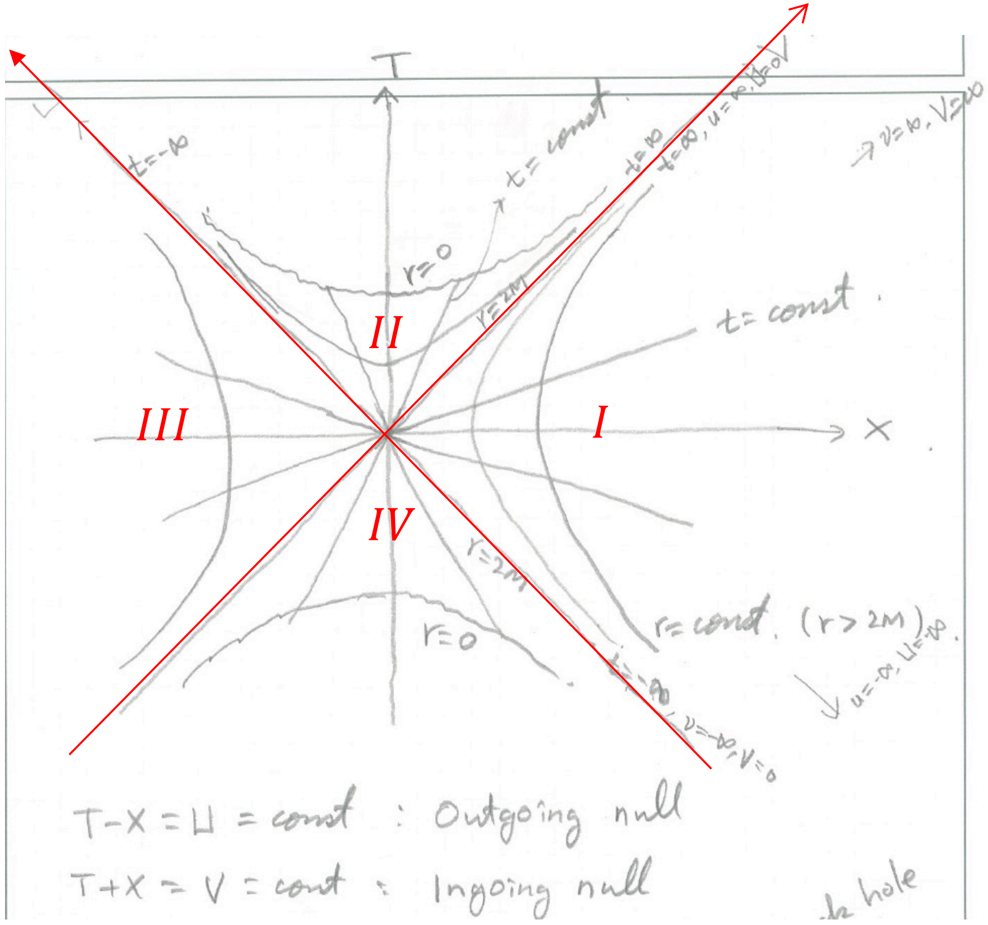


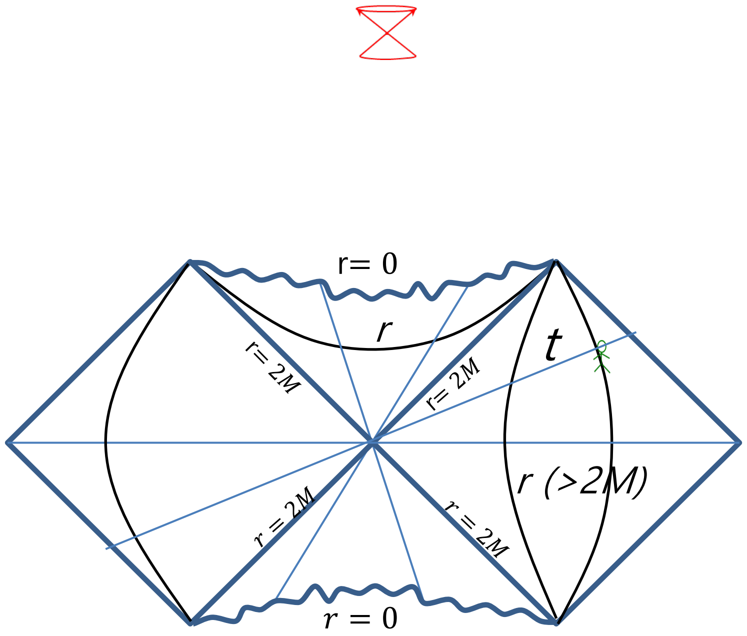
- 반경 방향 빛의 경로: $ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}(-dT^2 + dX^2) = 0$

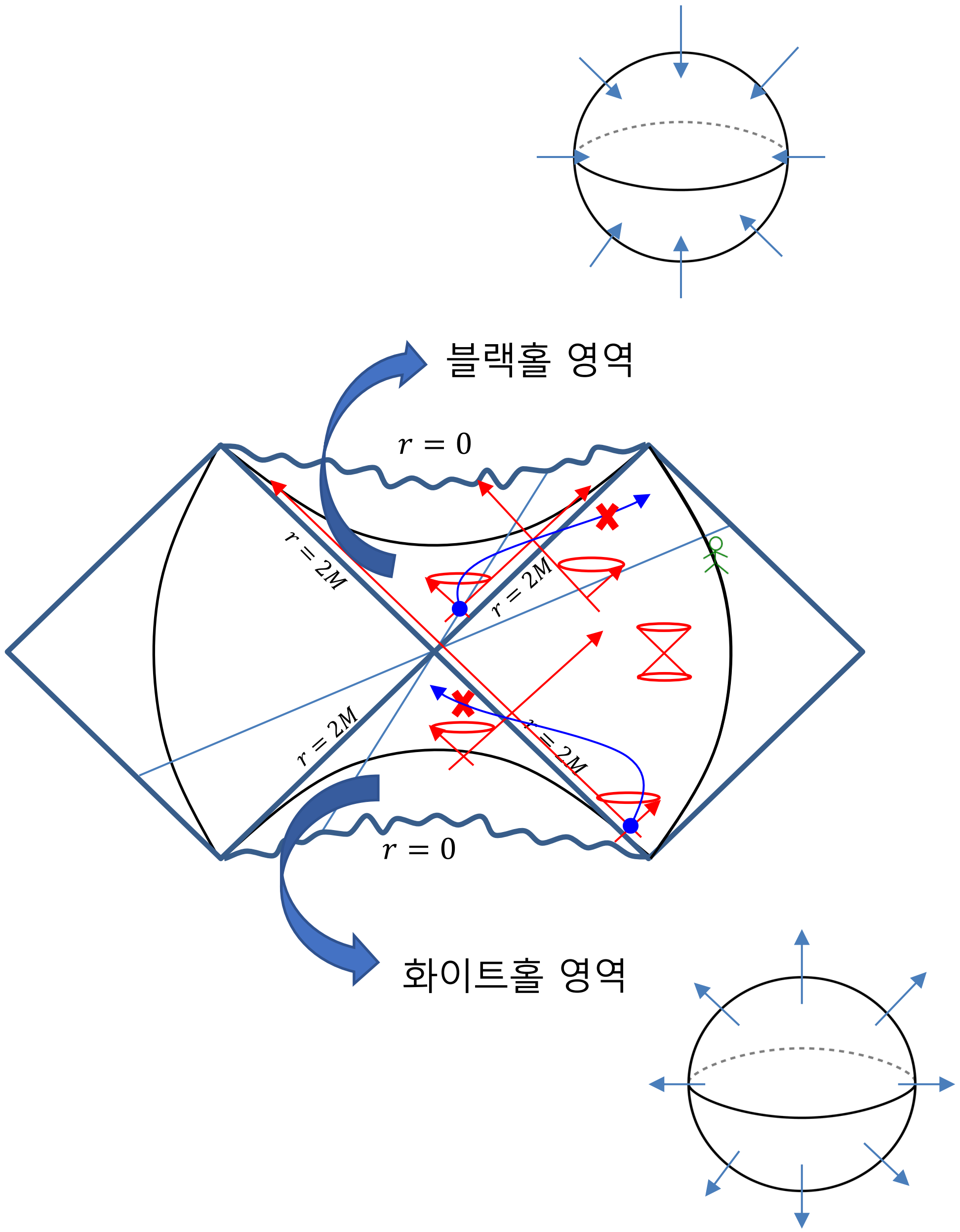
➔ $dX = \pm c dT$ ➔ 45° 방향

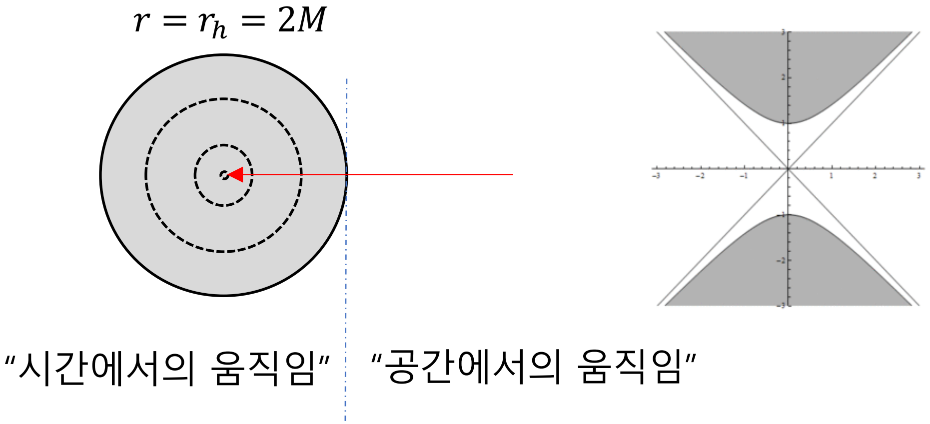


# ✓ 펜로즈 다이아그램(Penrose diagram):

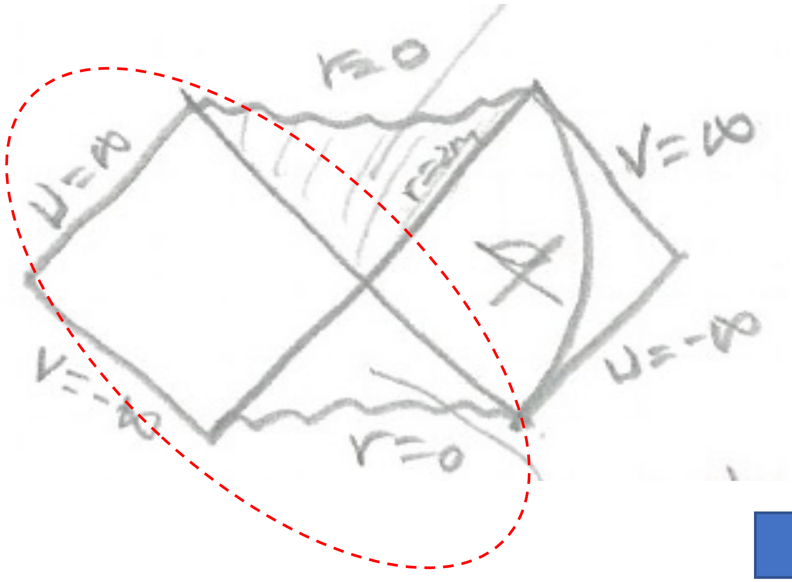


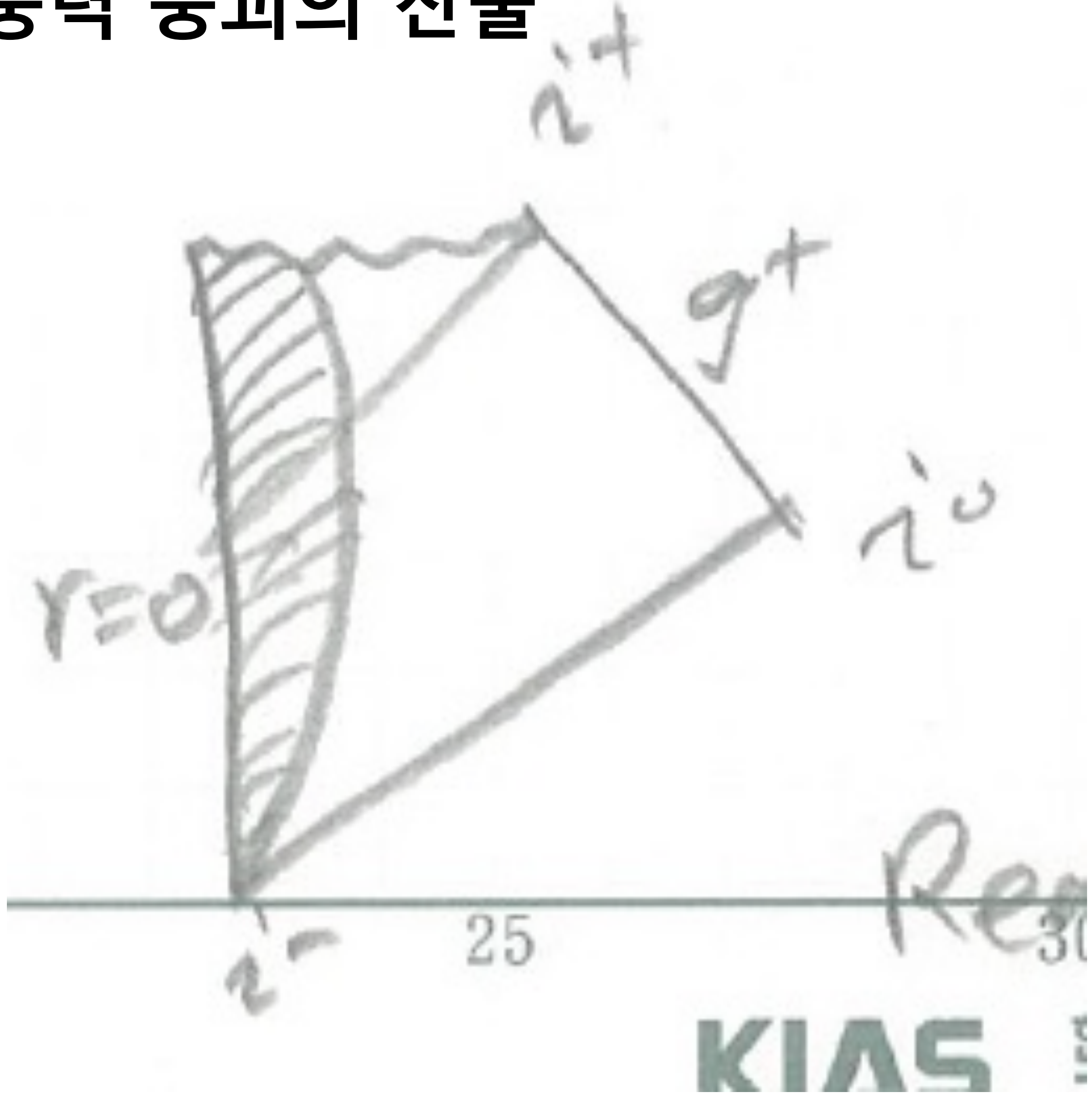




블랙홀 영역
r = 0
r = 2M
r = 2M
r = 2M
r = 2M
r = 0
화이트홀 영역


$r = r_h = 2M$
“시간에서의 움직임”
“공간에서의 움직임”

# ✓실제의 천체물리적인 블랙홀: 중력 붕괴의 산물




- +회전(각운동량) 有

# Part 3

# 블랙홀 내부의 풍경

# ✓"시간-공간" 좌표 역전

- **블랙홀 내부:** $0 \le r < 2M$

$$ds^2 = \underbrace{-\left(1-\frac{2M}{r}\right)}_{>0} dt^2 + \underbrace{\frac{dr^2}{1-2M/r}}_{<0} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

- $r, \theta, \phi = Const.$ 하고 $t -$ 좌표만 변할때:

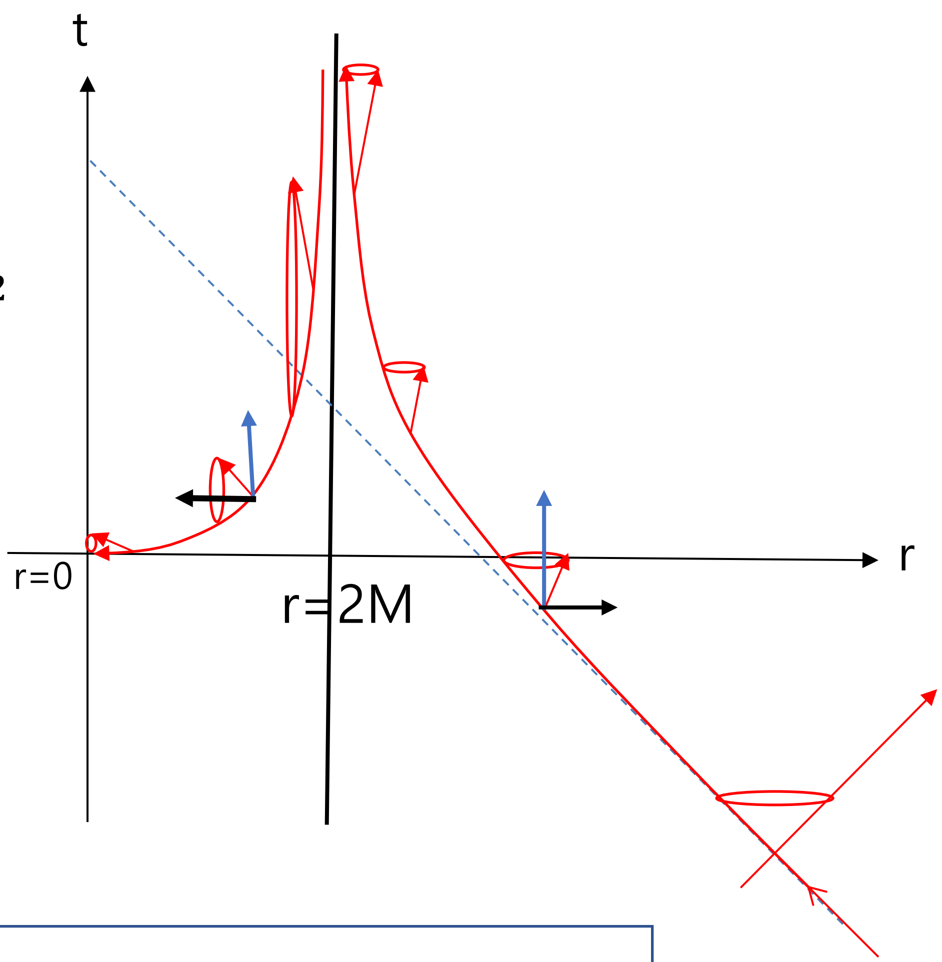
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right) dt^2 > 0\,??$$

➔ 시간 간격이 아니고 공간 간격!

- $r -$ 좌표만 변할때:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-2M/r} < 0$$

➔ 공간 간격이 아니고 시간 간격!

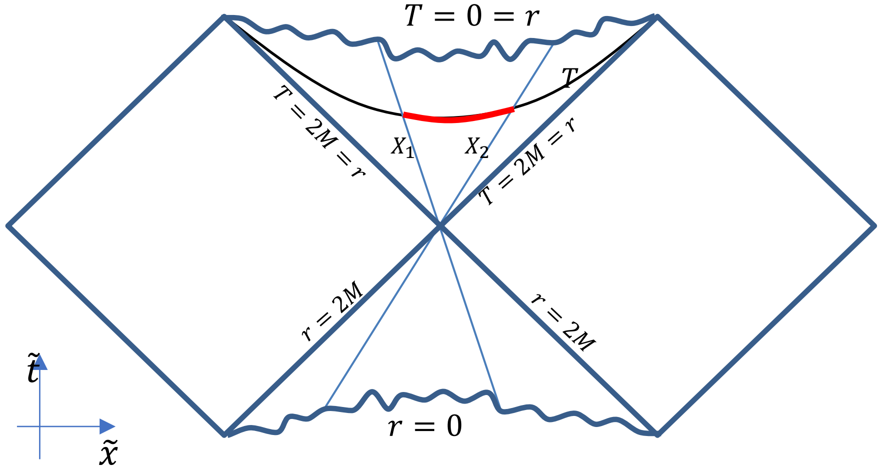



***t* 와 *r* 좌표의 역할이 뒤바뀜**

"구면"

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{2M/r-1} + \left(\frac{2M}{r} - 1\right)dt^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \text{w/} \quad t: -\infty\sim\infty, r: 0\sim 2M$$

$$r \to T, t \to X: \quad ds^2 = -\frac{dT^2}{2M/T-1} + \left(\frac{2M}{T} - 1\right)dX^2 + T^2 d\Omega^2 \quad \text{w/} \quad T: 2M\sim 0,\ X: -\infty\sim\infty$$




- 정적인 시공간이 아니고 시간에 따라 변함!
- $T$ = Constant,

$$\Delta L = \sqrt{\frac{2M}{T} - 1}\int_{X_1}^{X_2} dX = \sqrt{\frac{2M}{T} - 1}\Delta X : \quad 0\sim\infty$$

$$A = 4\pi T^2 : 16\pi M^2 \sim 0$$

➔ 공간의 크기: $\Delta V = 4\pi T^2 \times \sqrt{\frac{2M}{T} - 1}\Delta X : \quad 0\sim 3\sqrt{3}\pi M^2 \Delta X \sim 0$

- **공간이 팽창하다 다시 수축**
- $\boldsymbol{T}$: $\mathbf{2M\sim 0}$ ➔ **시간 흐름의 끝(곡률 특이점)이 있다!?**

# • 시간 여행(Time Travel)

(어느 SF 작가의 질문)

타임 패러독스 관련 질문

1. 질문 포인트

주인공이 불가사의한 현상으로 미래의 죽음을 알게 된 후, 죽음의 원인이 되는 행동을 하지 않는다면 주인공은 미래의 죽음을 피할 수 있을까? 아니면 어떤 다른 방식으로라도 죽게 되는 것일까?

2. 질문 내용 - 사례 중심

사례 1) 미래 뉴스

1) 주인공은 유명인이거나 영화배우다.

2) 주인공은 우연한 기회에 미래의 뉴스가 나오는 라디오를 얻게 된다.

3) 그 라디오에서 자신이 내일 교통사고를 당해 죽게 됨을 알게 된다. 라디오를 들은 날은 4월 2일이고, 죽인공이 죽는 날은 4월 3일이다.

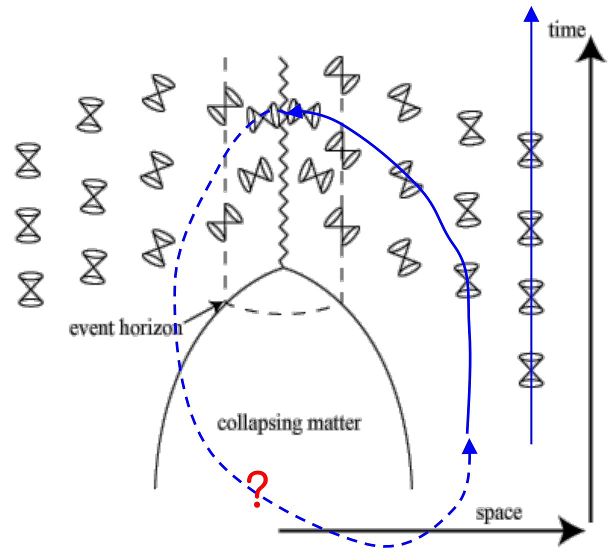
3) 주인공은 4월 3일 차를 몰고 갔어야 할 곳을 가지 않기로 하고, 집에만 있어 사고를 피했다.

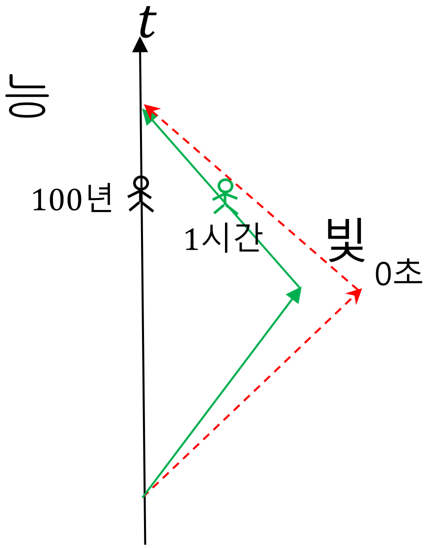
이 경우에서 타임 패러독스는 일어나지 않는가?

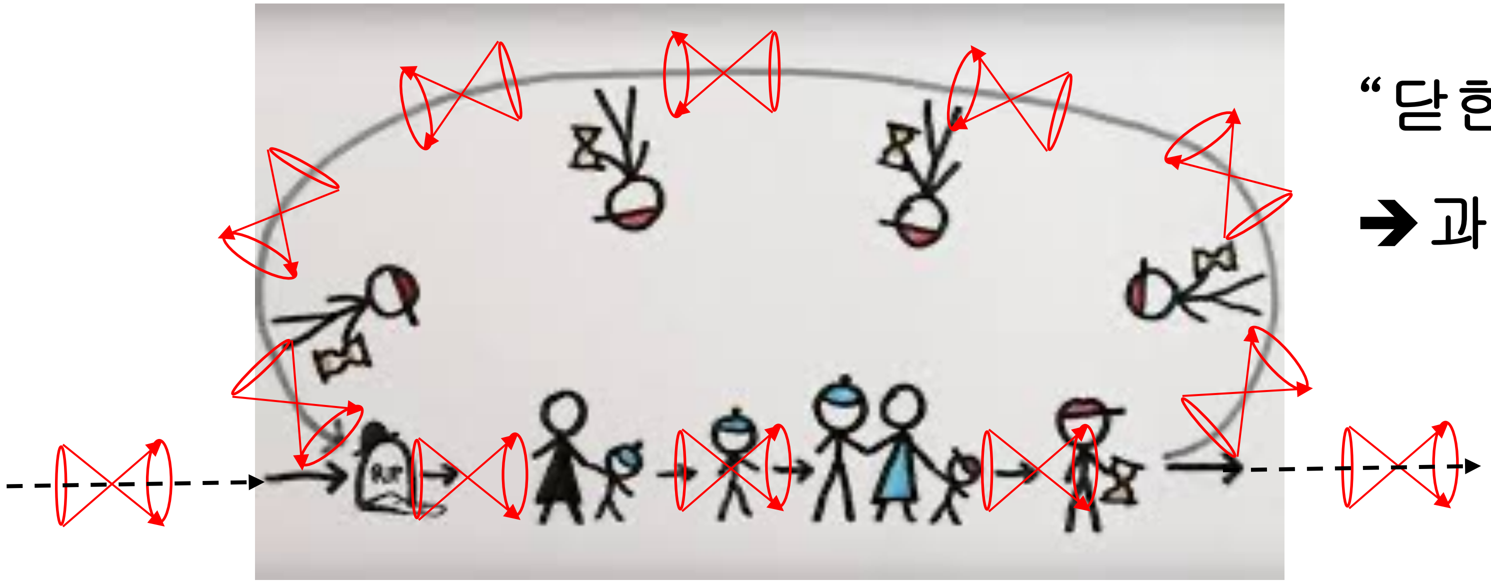
주인공이 다음 날 사고를 피했다면, 결과적으로 4월 3일에는 아무 일도 일어나지 않은 것이 된다. 그렇다면 미래의 뉴스가 나오는 라디오에서는 주인공의 죽음에 대한 뉴스를 방송하지 않을 것이고, 그렇다면 4월 2일의 주인공은 자신이 교통사고를 당한다는 사실을 알지 못하게 된다.

이러한 타임 패러독스에 대해 현재 시점에서는 선택의 변화로 A에서 A'의 세계로 간 것이다, 라는 평행우주 가설을 적용한다고 들은 적이 있다. 그렇게 평행우주의 관점으로 이 문제를 풀 수밖에 없을까? 다른 과학적인 설명이 가능한지...

- **미래로의 시간여행:** 빠른 우주선만 있으면 얼마든지 가능
- **과거로의 시간여행:** ??



"닫힌 인과 경로"

➔과거로의

여행 가능


Credit: Lwp Kommunikacio

**Stephen Hawking (2009/06/28):** “What a shame. I was hoping a future Miss Universe was going to step through the door.”