

2025 수치상대론 및 중력파 여름학교
(2025.07.28~08.01, 한국천문연구원)

일반상대론 기초

강 궁 원

(중앙대 물리학과, gwkwang@cau.ac.kr)

II. 일반상대론

목 차

- I. 뉴튼 중력 이론 수정하기
- II. 등가 원리
- III. 중력 방정식



시공간

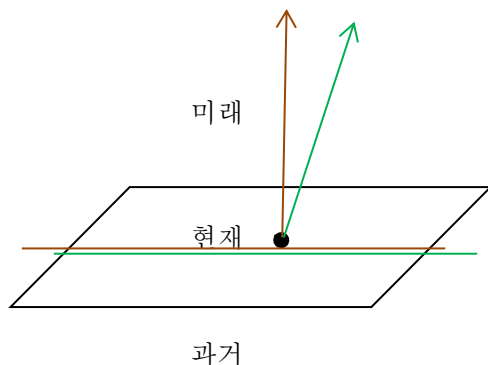


뉴턴(1687)

아인슈타인(특수상대론1905)

- ✓ 사건으로 이루어진 4차원 연속체
- ✓ 균일하고 경계가 없으며 무한 ...
- ✓ **물체의 존재와 무관하며 영향을 받지 않는다**

- 시간과 공간은 분리되어 있음
- 인과율:

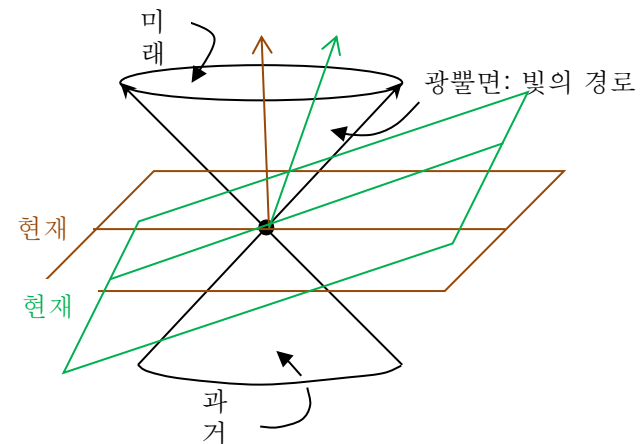


- 메트릭 구조:

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (\Delta t)^2$$

$$\Delta l = \Delta l', \quad \Delta t = \Delta t'$$

- 시공간 복합체
- 인과율: 광뿔에 의해 결정, 동시 사건은 관측자에 따라 다름



- 메트릭 구조:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

$$\Delta s = \Delta s' \quad (\Delta l \neq \Delta l', \quad \Delta t \neq \Delta t')$$

Part 1

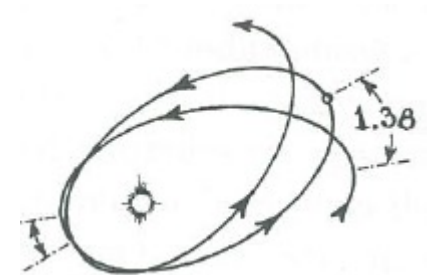
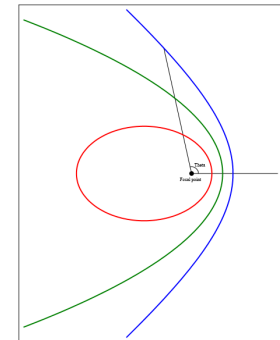
뉴턴 중력 이론 수정하기

✓ 뉴턴 중력 이론 수정하기

- 특수상대론에서의 시공간에 대한 새로운 이해에 기반하여 알려진 모든 물리 이론들은 이와 부합하게 수정되어야만 함


$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}$$

- 뉴턴 중력의 문제점:
 - “순간적으로 힘이 작용” → 인과율 위반
 - 로렌츠 변환에 대한 상대성 원리 위반
 - 수성의 세차 운동 관측: 100년에 ~1.38''



(달한 타원 궤도) → 실제: 세차 운동

- **뉴턴 중력:**

- 점 질량: $\vec{F}_G = G \frac{Mm}{r^2} (-\hat{r}) = -m \vec{\nabla} \phi \iff \phi = -G \frac{M}{r}$: 중력 퍼텐셜
- 일반적인 질량 분포: 밀도 함수 $\rho(\vec{x}, t)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = 4\pi G \rho(\vec{x}, t)$$

- 상대성 원리 만족하는가? ➔ 아니다!
- ϕ : 스칼라양, $\rho = T_{00}$: 비스칼라양
- "시간"과 "공간"이 동등하지 않음

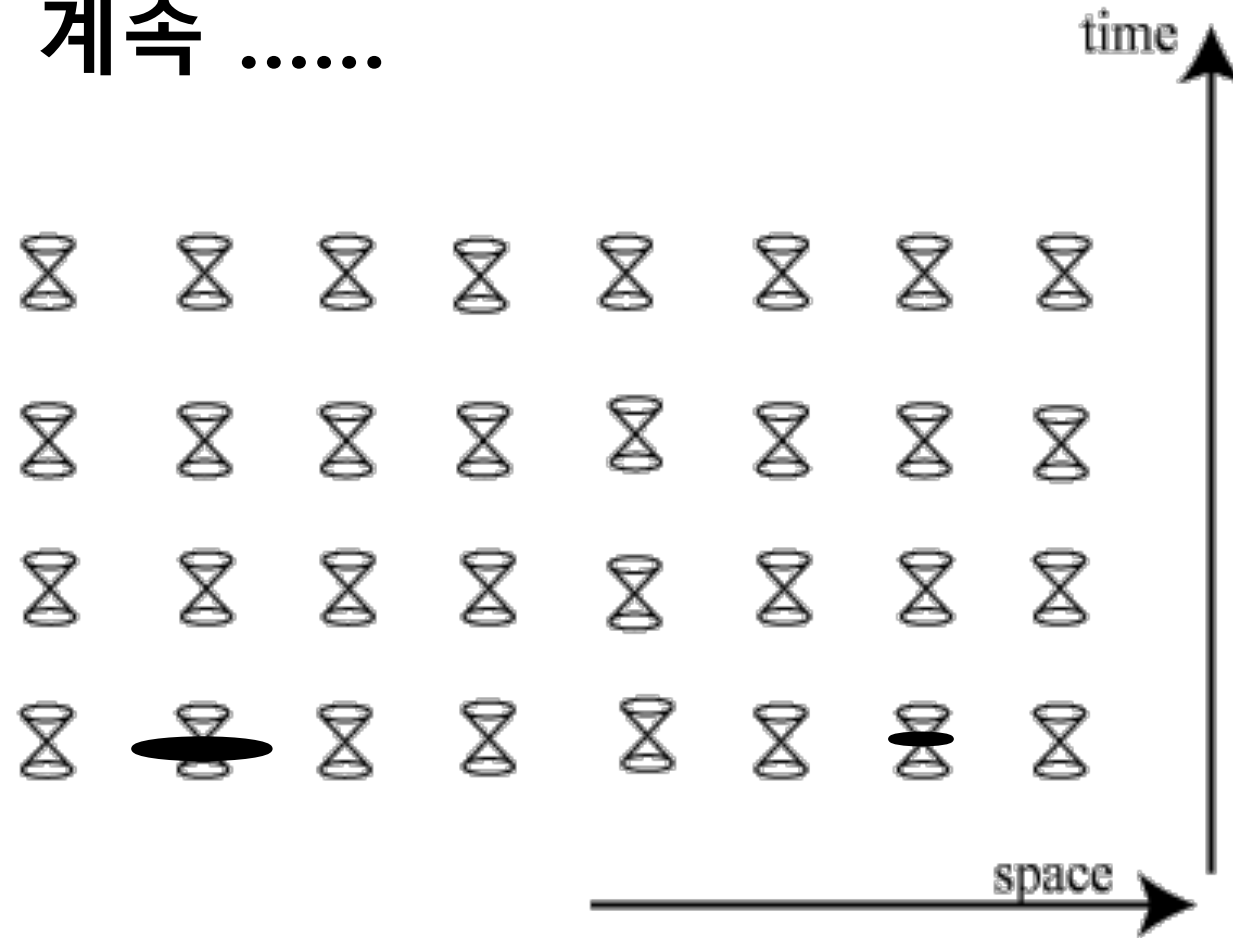
- **스칼라 중력 이론: 노르드스트룀(Nordstroem, 1914)**

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(\vec{x}, t) = -\frac{4\pi G}{c^2} T,$$

여기서 $T \equiv T^\mu{}_\mu = T^0{}_0 + T^1{}_1 + T^2{}_2 + T^3{}_3$

- 상대성 원리와 인과율 만족!!
- 하지만 관측과 맞지 않음: 음의 세차 운동 → 수정 실패

- 이론 수정 계속



(Figure credit: <http://plato.stanford.edu/entries/spacetime-singularities/lightcone.html>)

- **생각의 기본 바탕:** 새로운 상대성 원리에 맞는 중력 상호작용 이론을 탐색했으나 시공간 자체는 여전히 고정된 배경으로 취급

Part 2

등가 원리

✓ 평생 가장 행복한 생각 (The happiest thought of my life):



(출처: 네이처 2015)

“베른의 특허국 사무실 한 의자에 앉아 있을 때 불현듯 한 생각이 떠올랐다: ‘만약 한 사람이 자유낙하하고 있으면, 그는 그 자신의 무게를 느끼지 못할 것이다.’” (“I was sitting in a chair in the patent office at Bern, when all of a sudden a thought occurred to me: ‘If a person falls freely, he will not feel his own weight.’”

- 1907년 11월 어느날

✓ 등가 원리(Equivalence principle, 1907):

i) 관성 질량(m_I) = 중력 질량 (m_G):

- $m_I a = F \rightarrow a = \frac{F}{m_I}$

➔ "속도 변화에 저항하는 정도"

- $F_G = G \frac{m_G M_G}{r^2}$

➔ "중력의 강도를 매개하는 고유한 성질"

- $m_I a = F_{\text{중력}} = m_G \times \left(\frac{GM_G}{r^2} \right)$

$\Rightarrow a = \frac{m_G}{m_I} \times \left(\frac{GM_G}{r^2} \right) : \text{물체의 "무거움"과 무관}$

➔ $\frac{m_G}{m_I} = 1 \text{ or Constant.}, \text{ e.g., } m_G = m_I$

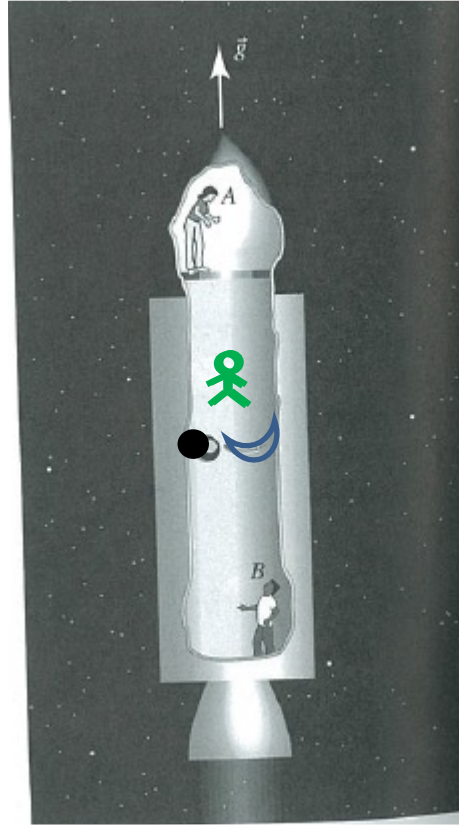


(Credit: Luigi Catani, 1816)

ii) 균일 중력장 vs 등가속계:



중력이 있는 경우: $\vec{g} \neq 0$

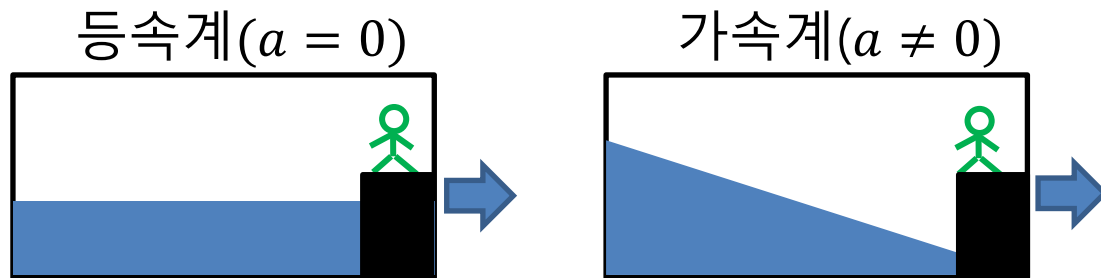
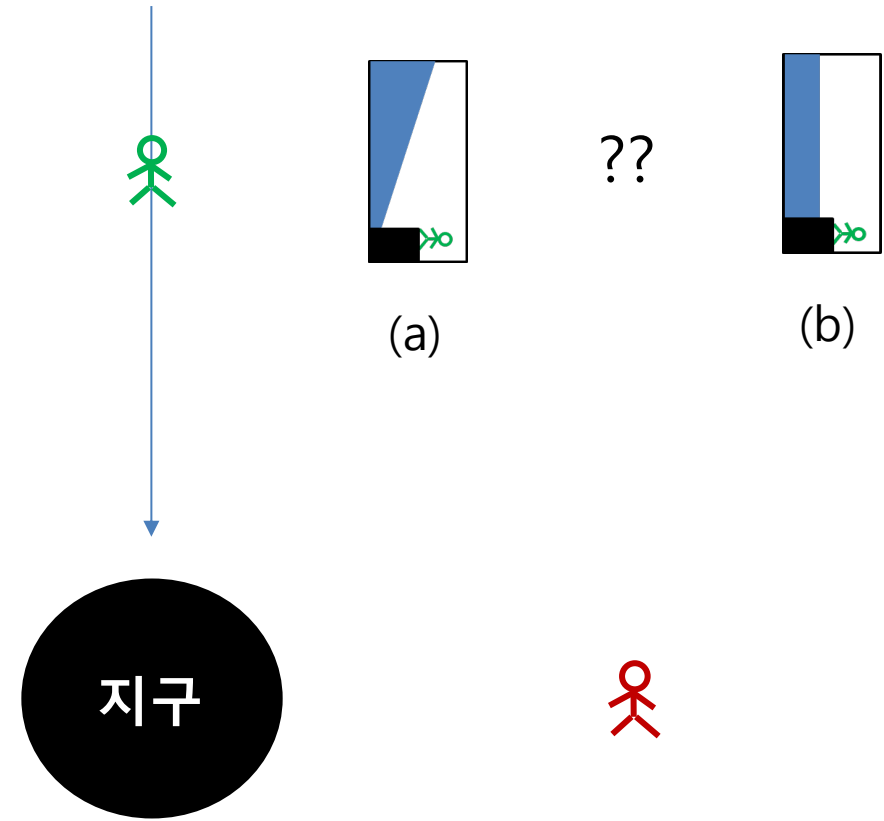


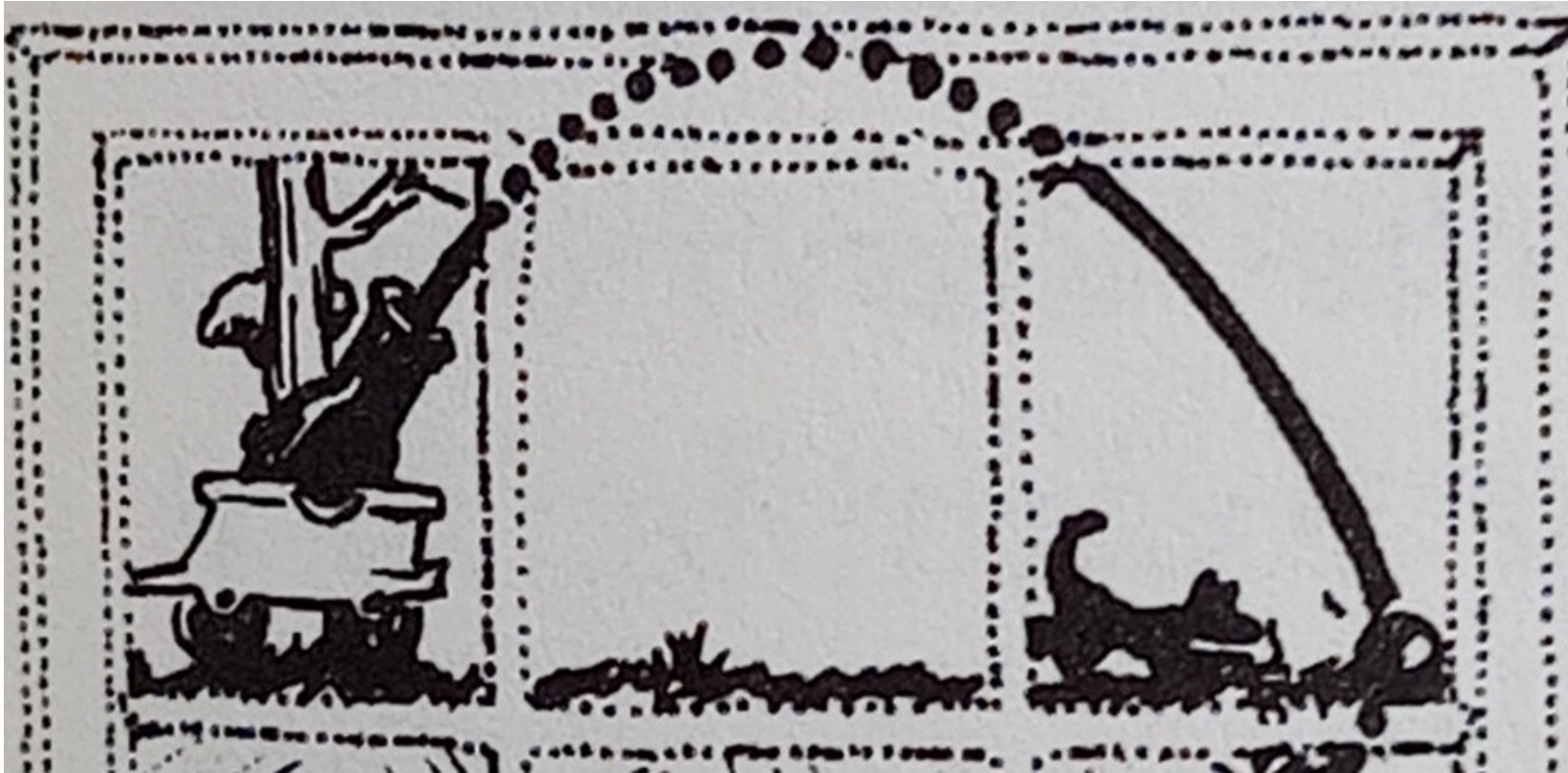
무중력 등가속 운동:
 $\vec{a} = -\vec{g}$

“일정한 크기의 중력이 작용하는 계(왼쪽 그림)와 편평한 시공간에서 크기는 같으며 방향은 반대로 등가속 운동하는 계(오른쪽 그림)는 구별 불가능”

iii) 자유 낙하:

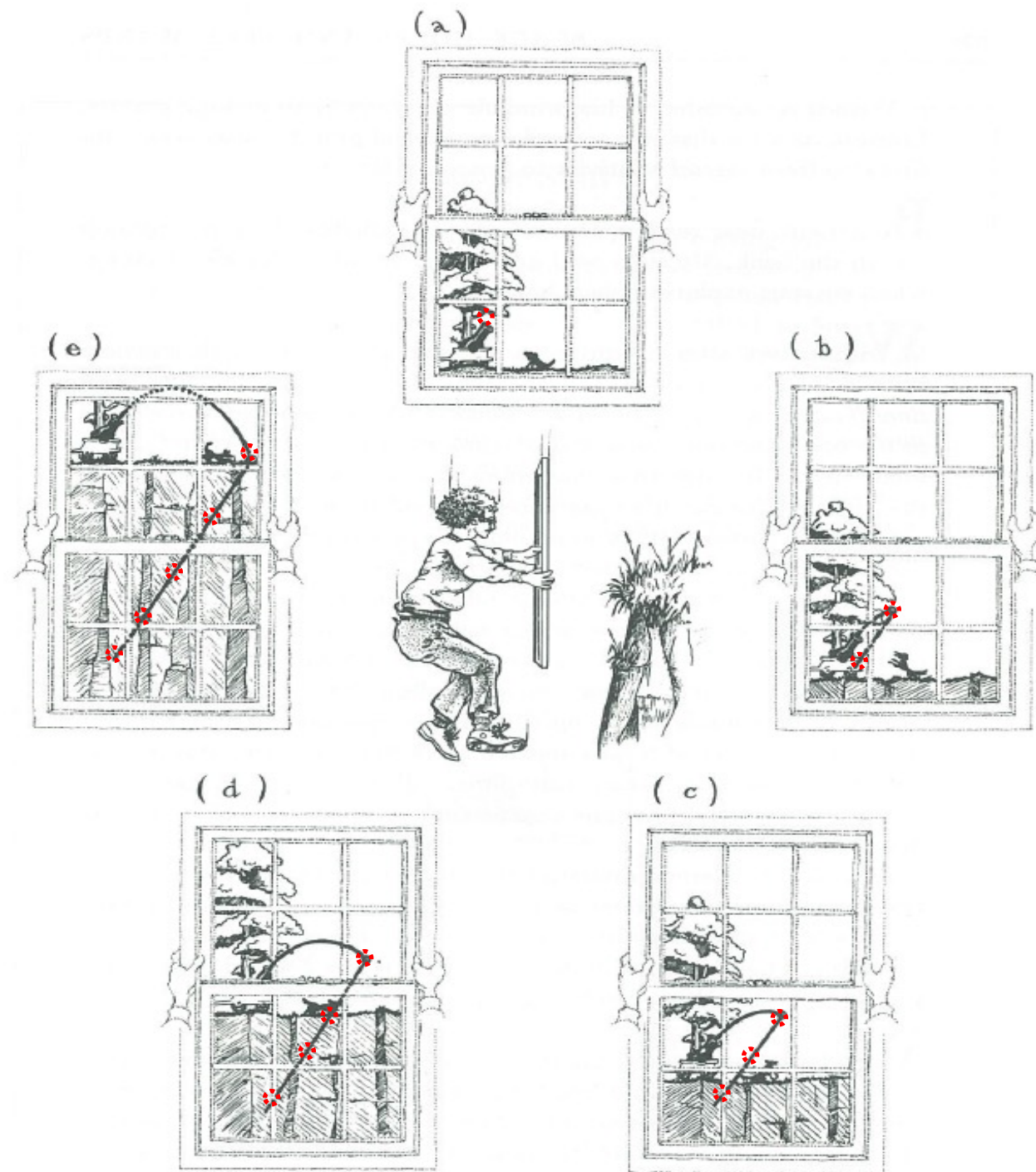
- 균일 중력장 하에서 자유낙하하는 사람은 "중력"을 느끼지 못한다.
- 가속 운동 or 비가속운동?
- 관성계??....!!



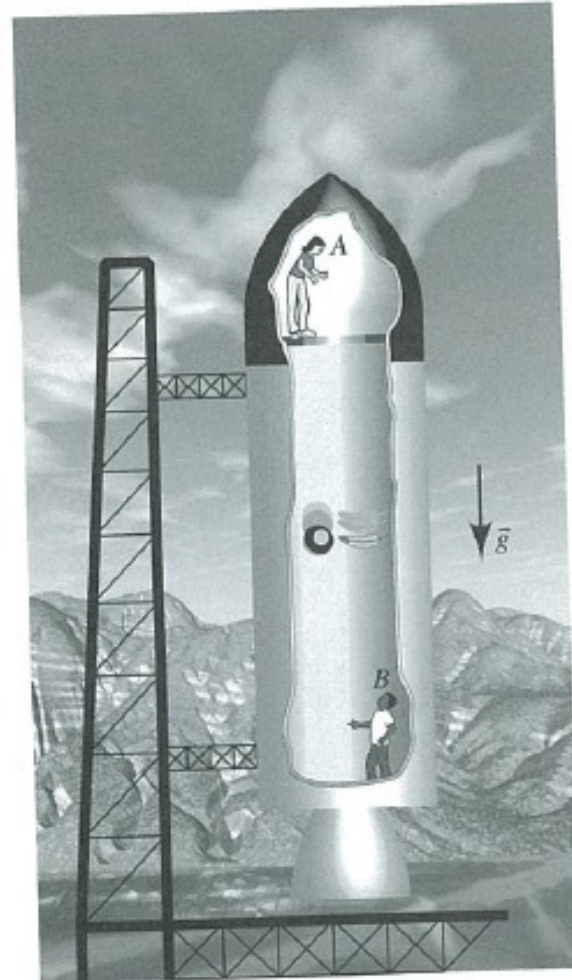
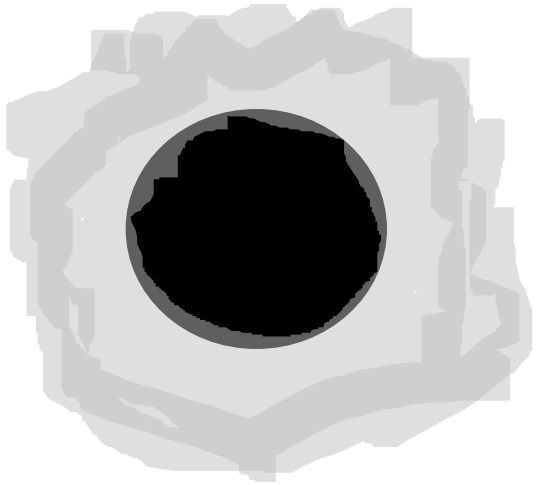


(그림 출처: Thorne)

- 포탄의 운동은 (등)가속 운동 ➔ 자유낙하하는 사람이 보면?
- 자유낙하하는 관측자는 관성계
- 자유낙하하는 포탄에 앉아있는 사람도 관성계
- 관성계가 다른 관성계를 보는 것과 동일: "관성운동" ➔ 즉, 정지해 있거나 일정한 속도로 움직일 것이다.

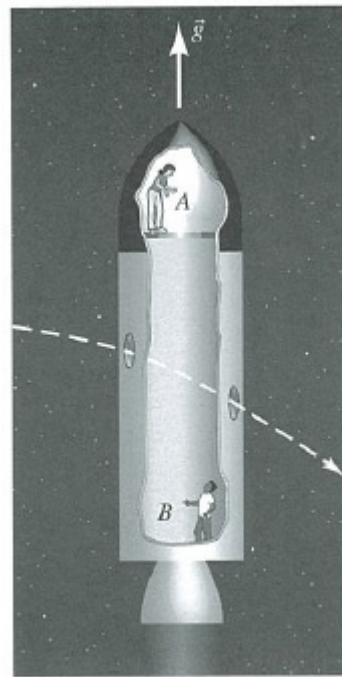
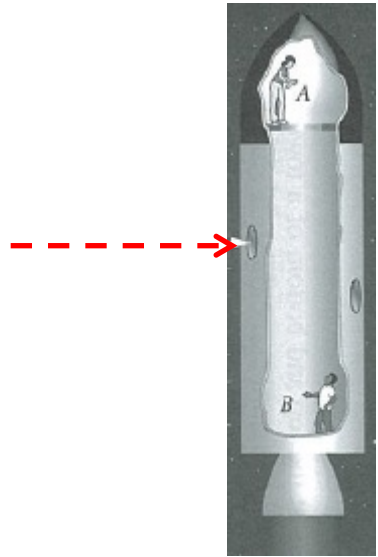


- 무거운 물체 주위의 공간

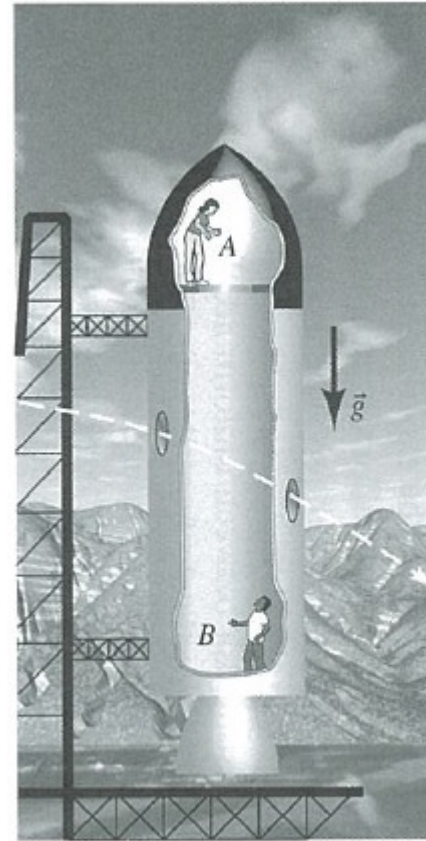


(?)

- 등가속계:

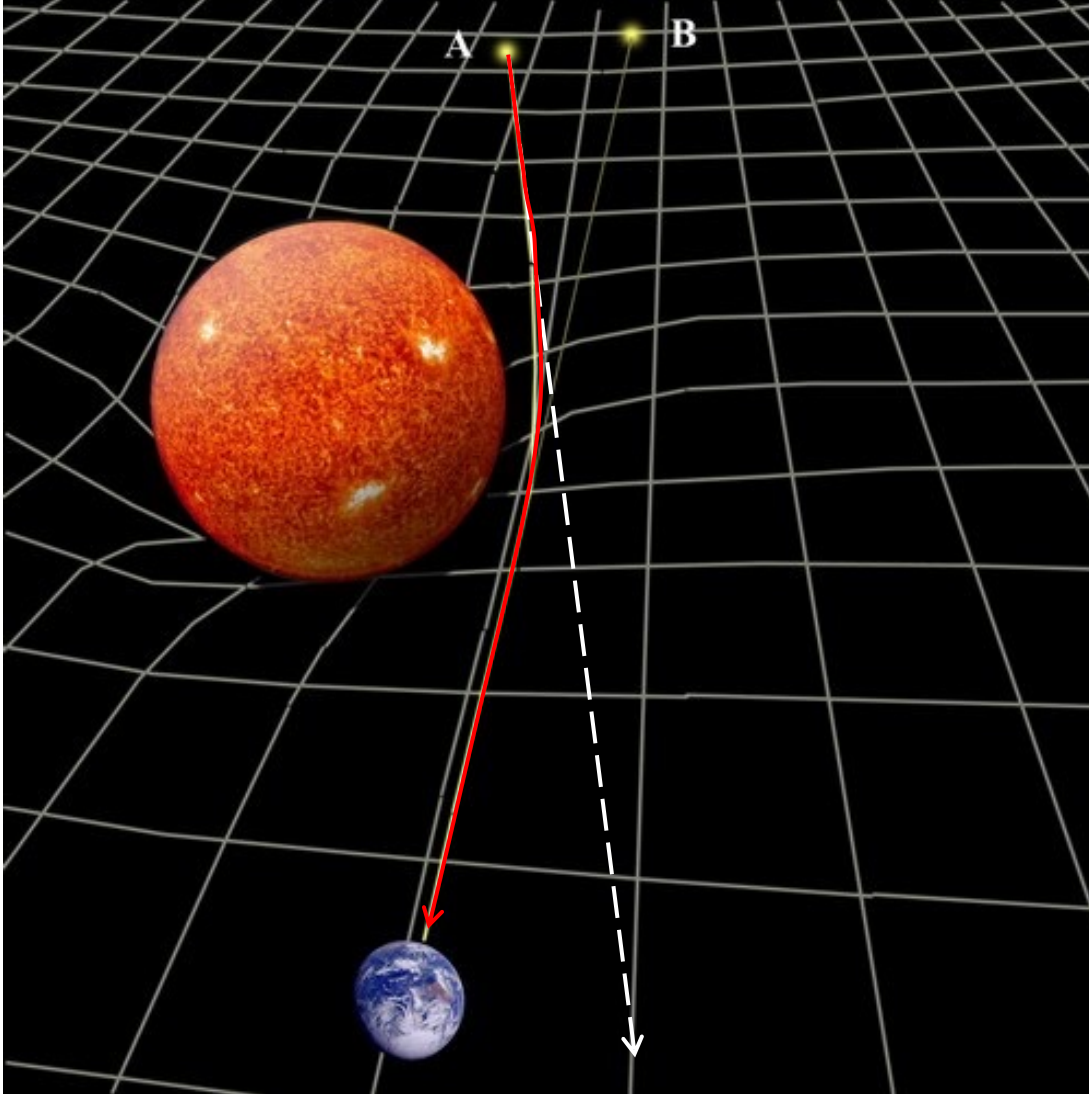


rocket frame

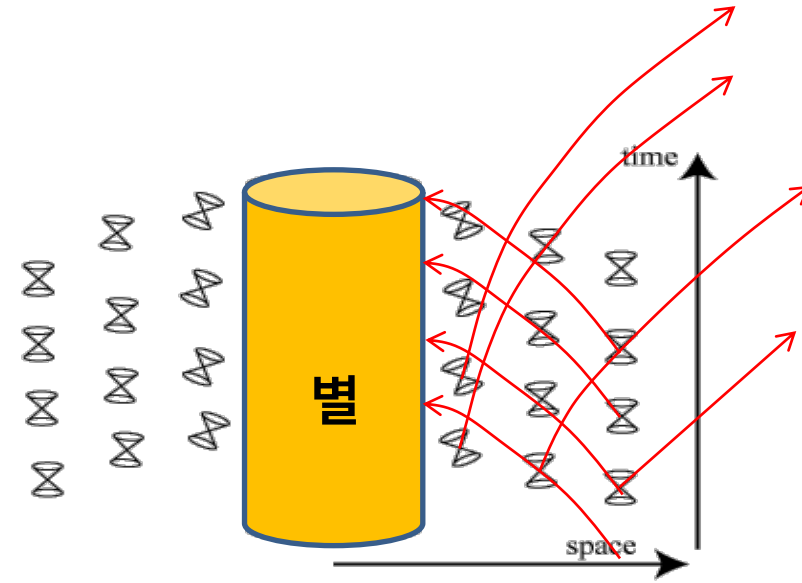
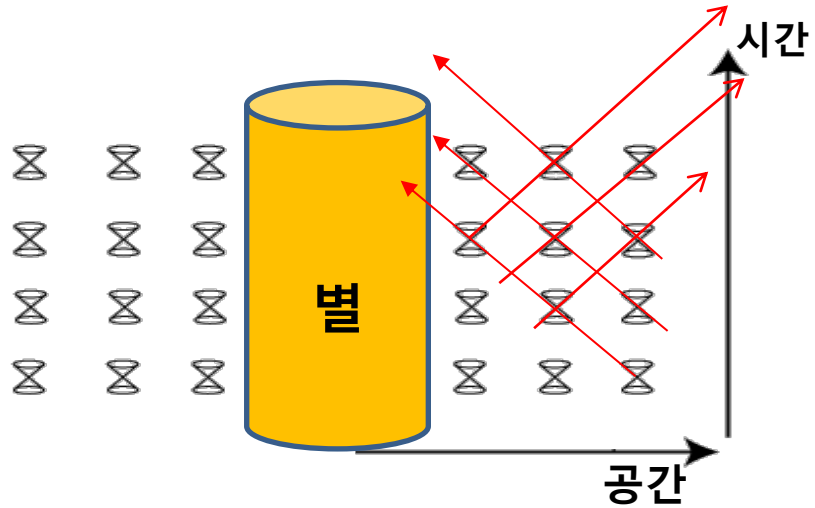


gravitational field

중력장이 있으면
빛이 휘다...??!!



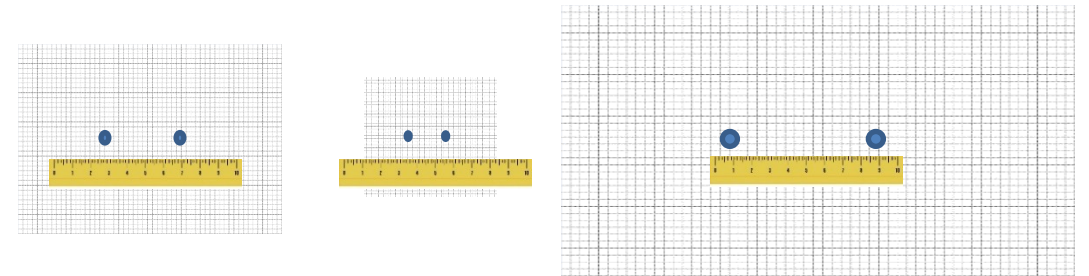
- 무거운 물체 주위에서 빛의 경로가 휘다면...?
- 공간 자체가 휘어져 있다는 것인가...?
- 중력의 존재 혹은 물체의 출현이 공간을 휘게 한다...??!!
- 그렇다면 특수상대론에서 시공간은 고정시켜 놓고 뉴턴 중력을 수정하려는 것은 잘못된 방향...??!!!



$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
 &\equiv \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{01} dx^0 dx^1 + \eta_{02} dx^0 dx^2 + \dots
 \end{aligned}$$

민코브스키 메트릭 텐서: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 편평한 시공간 → 휘어진 시공간
- 휘어진 시공간을 기술하는 물리량은?



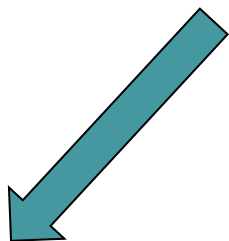
- $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x) (?)$: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$
- $g_{\mu\nu}(x)$: 메트릭 텐서(시공간의 기본 “물리량”)

Part 3

중력 방정식

✓ 중력 방정식

- 주어진 물질 분포에 대해 메트릭 텐서를 결정하는 방정식
- 뉴턴의 중력 방정식: $\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho(\vec{x}, t)$: Any hint?



시공간 곡률: “곡률 텐서”

$$(??)_{\alpha\beta} \sim T_{\alpha\beta}$$



ρ : “질량 밀도” $\sim T_{00} = T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$

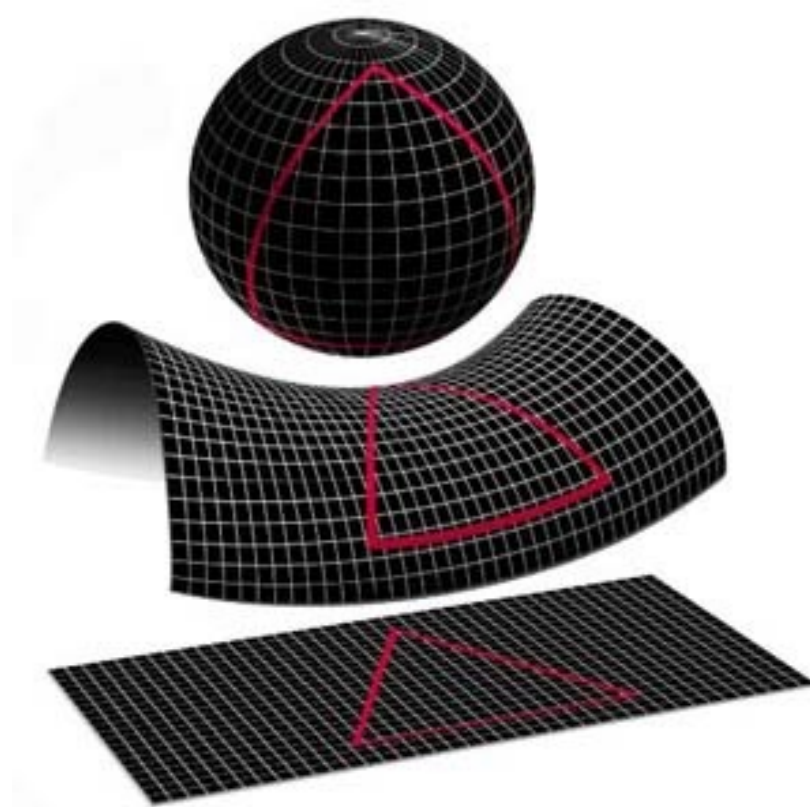
물질 분포: “에너지-운동량-스트레스 텐서”

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0i} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{에너지 밀도}(\rho) & \text{운동량 밀도 플럭스}(p^i) \\ \text{운동량 밀도 플럭스}(p^i) & \text{스트레스 텐서}(S^{ij}) \end{pmatrix}$$

Ex) (완전) 유체: $T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + P(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta) \rightarrow \text{diag}(\rho, P, P, P)$

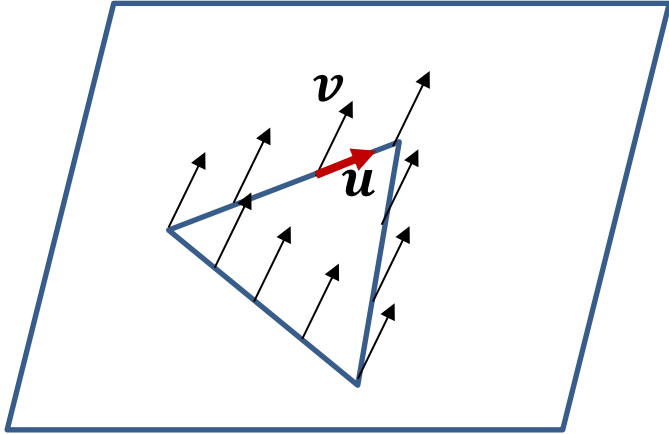
- **곡률:**

- 시공간의 휘어진 정도를 나타내는 수학적인 양 필요



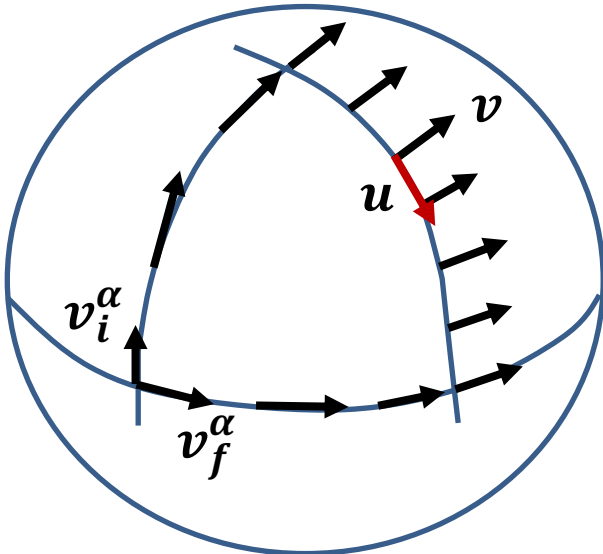
(출처: NASA)

- 벡터의 평행 이동: 평행이동 방정식: $u \cdot \nabla v^\alpha = 0$



$$\delta v^\alpha \equiv v_f^\alpha - v_i^\alpha \begin{cases} = 0 & \leftrightarrow \text{편평} \\ \neq 0 & \leftrightarrow \text{휘어짐} \end{cases}$$

$$\propto R_{\beta\gamma\sigma}{}^\alpha : \text{"리만 곡률 텐서"}$$



$$R_{\beta\gamma\sigma}{}^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{편평한 시공간}$$

$$R_{\beta\gamma\sigma}{}^\alpha \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{휘어진 시공간}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} - \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\delta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma}\Gamma_{\beta\sigma}^{\delta} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\delta}$$

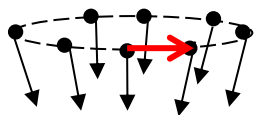
여기서 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = \frac{1}{2}g^{\delta\gamma}(\partial_{\alpha}g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta}g_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta})$: Christoffel 심볼

- 리치(Ricci) 텐서: $R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\delta\beta}{}^{\delta} = R_{\alpha 0\beta}{}^0 + R_{\alpha 1\beta}{}^1 + R_{\alpha 2\beta}{}^2 + R_{\alpha 3\beta}{}^3$
- 리치 스칼라: $R \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} + \dots$
- 아인슈타인 텐서: $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$: $(g_{\alpha\beta}, \partial g_{\alpha\beta}, \partial^2 g_{\alpha\beta})$ 의 함수

Note: $\nabla^{\beta}G_{\beta\delta} = 0$

• 중력 방정식의 추정: 조석력(Tidal force)

“자유낙하”



$$\vec{\chi} : \vec{a}_{tidal} = \ddot{\vec{\chi}}$$



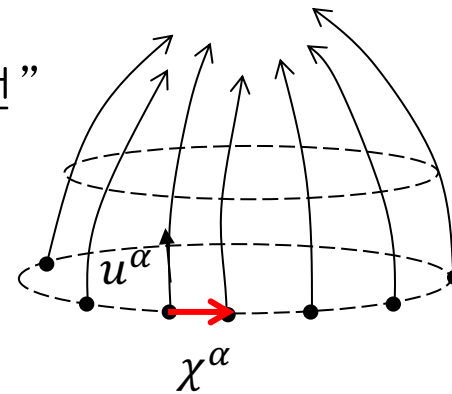
- 중력 관점:

$$a^i = \frac{d^2 \chi^i}{dt^2} = -\partial^i \partial_j \phi \chi^j$$

$$\Rightarrow a^\alpha \cong -\underline{\partial^\alpha \partial_\gamma \phi} \chi^\gamma \quad \rightarrow$$

$$\partial^\alpha \partial_\gamma \phi \cong R_{\beta\gamma\delta}{}^\alpha u^\beta u^\delta$$

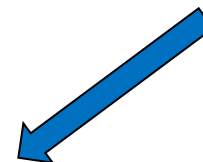
“측지선”



시간

- 휘어진 시공간 관점:

$$a^\alpha = u \cdot \nabla (u \cdot \nabla \chi^\alpha) = -\underline{R_{\beta\gamma\delta}{}^\alpha u^\beta u^\delta} \chi^\gamma$$



$$R_{\beta\gamma\delta}{}^{\alpha} u^{\beta} u^{\delta} \cong \partial^{\alpha} \partial_{\gamma} \phi$$

$$\rightarrow \underline{R_{\beta\alpha\delta}{}^{\alpha}} u^{\beta} u^{\delta} \cong \partial^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi \cong \vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho = 4\pi G T_{00} = \underline{4\pi G T_{\beta\delta}} u^{\beta} u^{\delta}$$

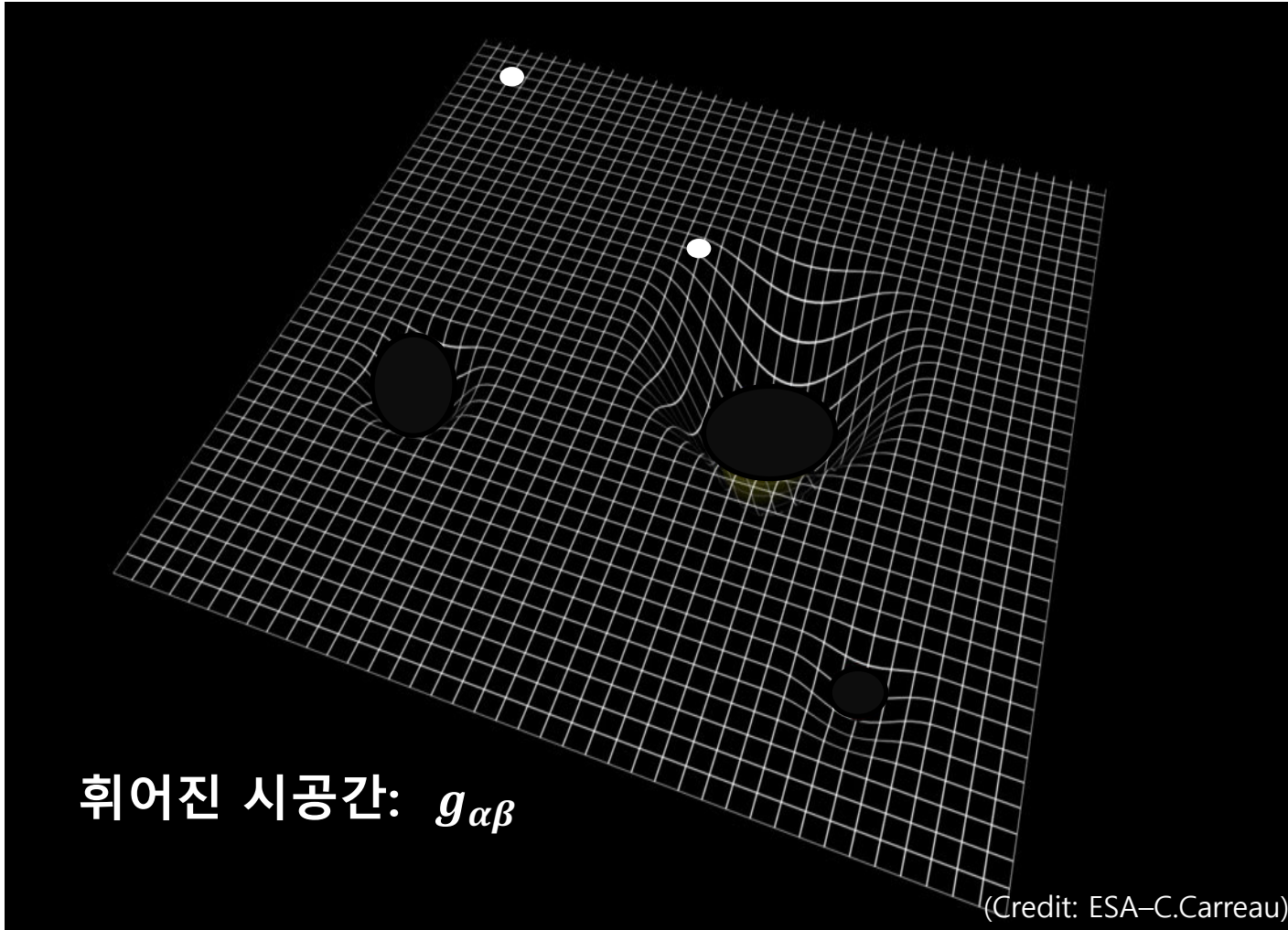
$\therefore$ 추정: $R_{\beta\delta} = 4\pi G T_{\beta\delta}$ (?) : 모순 $\because \nabla^{\beta} T_{\beta\delta} = 0$ 이지만 $\nabla^{\beta} R_{\beta\delta} \neq 0$?

$$\rightarrow R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R = \lambda T_{\beta\delta}. \text{ 그리고 뉴턴 근사 이용해 } \lambda = 8\pi G/c^4 \text{ 결정.}$$

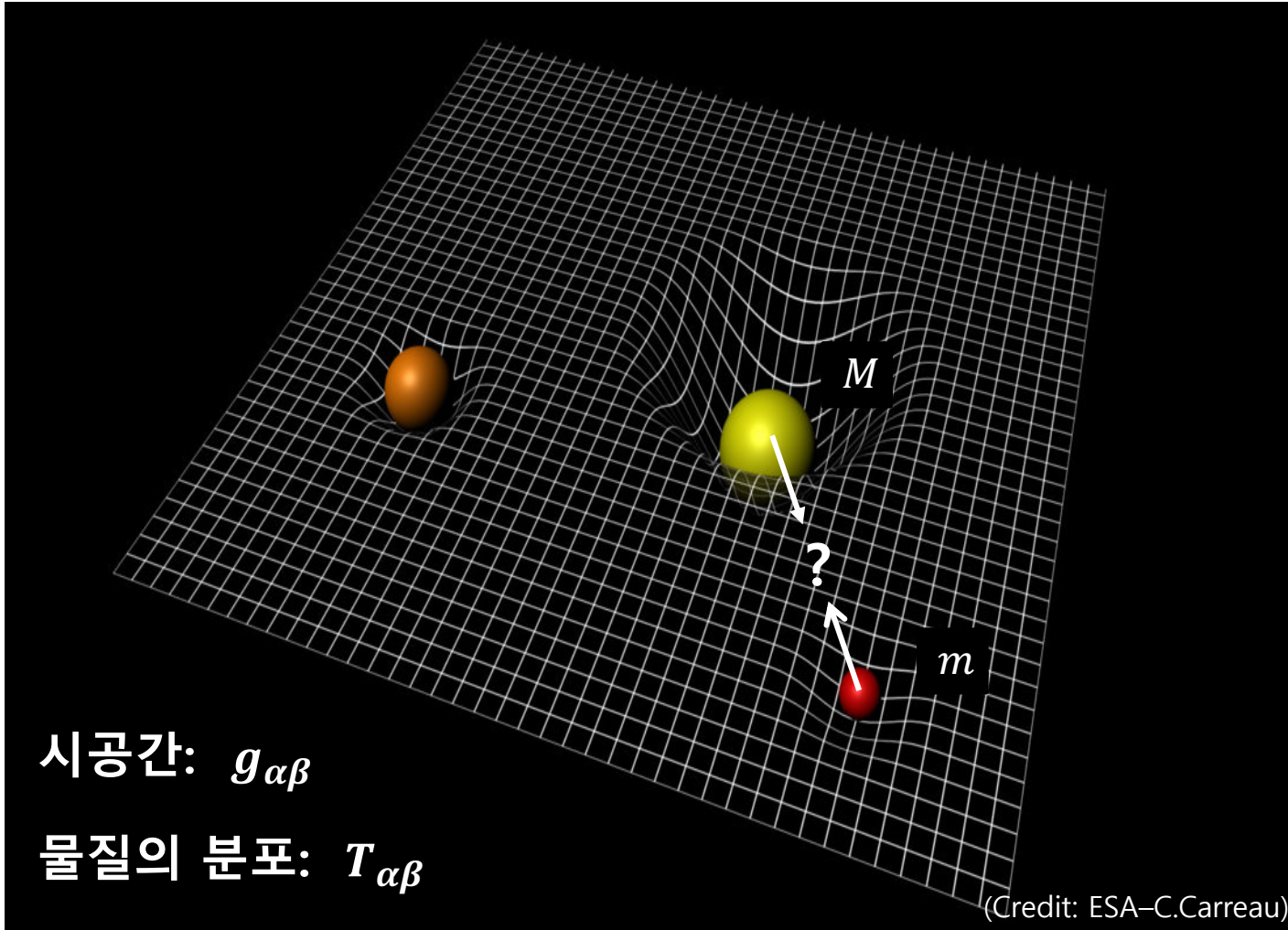
$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$

- 2차 편미분 방정식
- $\partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\beta}$ 에 선형이나 $g_{\alpha\beta}$ 에 대해 고도로 비선형적 방정식
- 10개의 미지 함수 $g_{\alpha\beta}(x)$ 에 대한 10개의 방정식
- 국소적 방정식

✓ 물체/물질(중력)과 상호작용하는 시공간



- 그렇다면 이 휘어진 공간에 놓여 있는 물체의 움직임은?
 - ➔ 이 휘어진 공간에서의 "자연스러운 운동"(관성 운동, 자유 낙하)
 - ➔ 측지선(Geodesic) 운동: $u \cdot \nabla u = 0$
Ex) $\ddot{r}(\tau) \sim \partial_r g_{tt}(r) \neq 0$:
- 정지해 있던 물체는 곡률이 큰 쪽으로 운동 ➔ "중력 혹은 인력 작용"

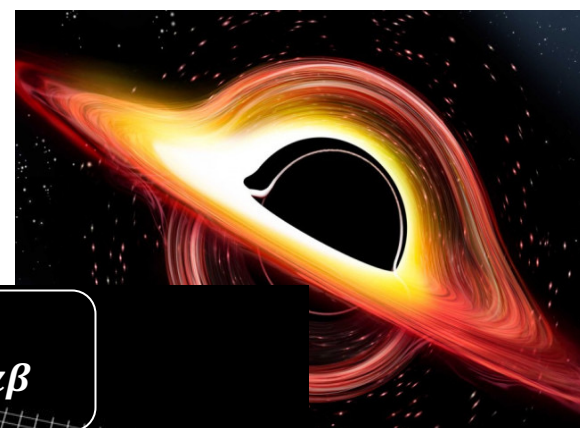
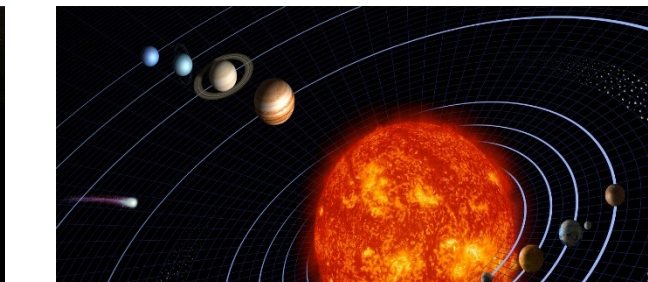


- 여기에 두 질량 사이의 "중력"은 여전히 추가적으로 작용하고 있을 것인가?
- 아니면... 그런 "중력"은 더 이상 없고 휘어진 공간에 의한 움직임만이 ...????

→ J. Wheeler: "Matter tells how to curve, and Spacetime tells how to move."

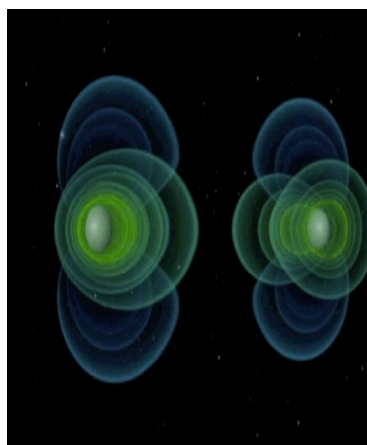


<http://www.navcen.uscg.gov/ftp/gps/g>

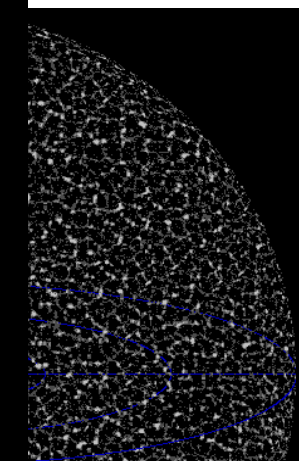
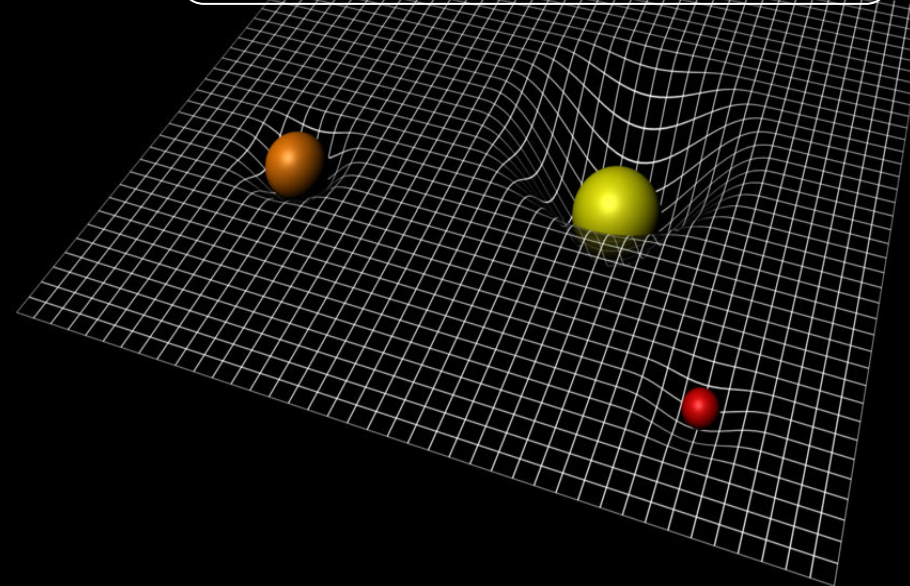


Kelly/Discover

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$



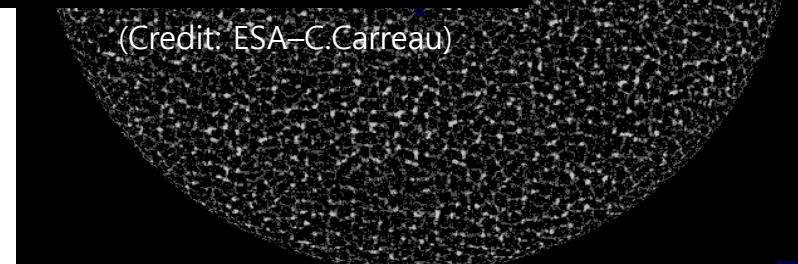
Credit: M. Koppitz



(Credit: ESA-C.Carreau)



Andromeda M31 (~67 kpc, NASA/JPL-Caltech)



Visible Universe (~8.6 Gpc, <http://www.atlasoftheuniverse.com/universe.html>)