2025 수치상대론 및 중력파 여름학교
(2025.07.28~08.01, 한국천문연구원)

일반상대론 기초

강 궁 원

(중앙대 물리학과, gwkang@cau.ac.kr)

✓ 여름학교 주제

- **수치상대론**
  - 3+1 형식화
  - 수치해석 기초
  - 블랙홀 쌍성의 형성과 진화
  - 중성자별 구조와 상태방정식
  - 블랙홀 Quasi-normal modes

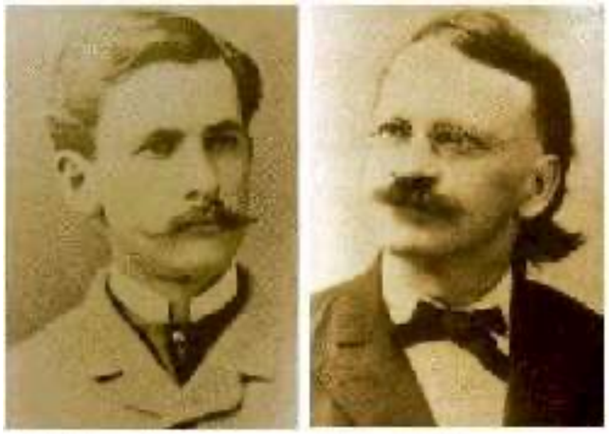
- **중력파**
  - 중력파 기초
  - 블랙홀 쌍성 중력파형
  - 중력파 검출기 개선 기술개발
  - 데이터분석 기초, 신호탐색 및 모수추정
  - 배경복사 중력파 및 Pulsar timing array
  - 중력파의 중력렌징
  - 다중신호 천문학
  - 중력파 우주론

일반상대론, 천체물리/천문학, 광학, ……

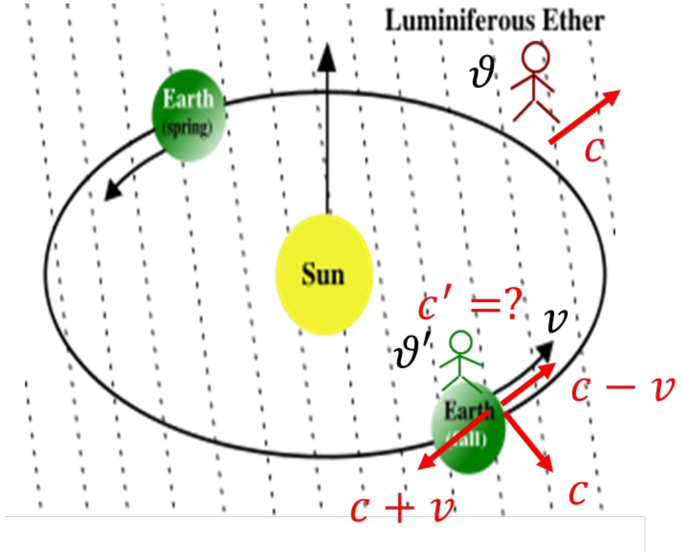
목 차

I. 특수상대론

✓ 전통적 접근 방법

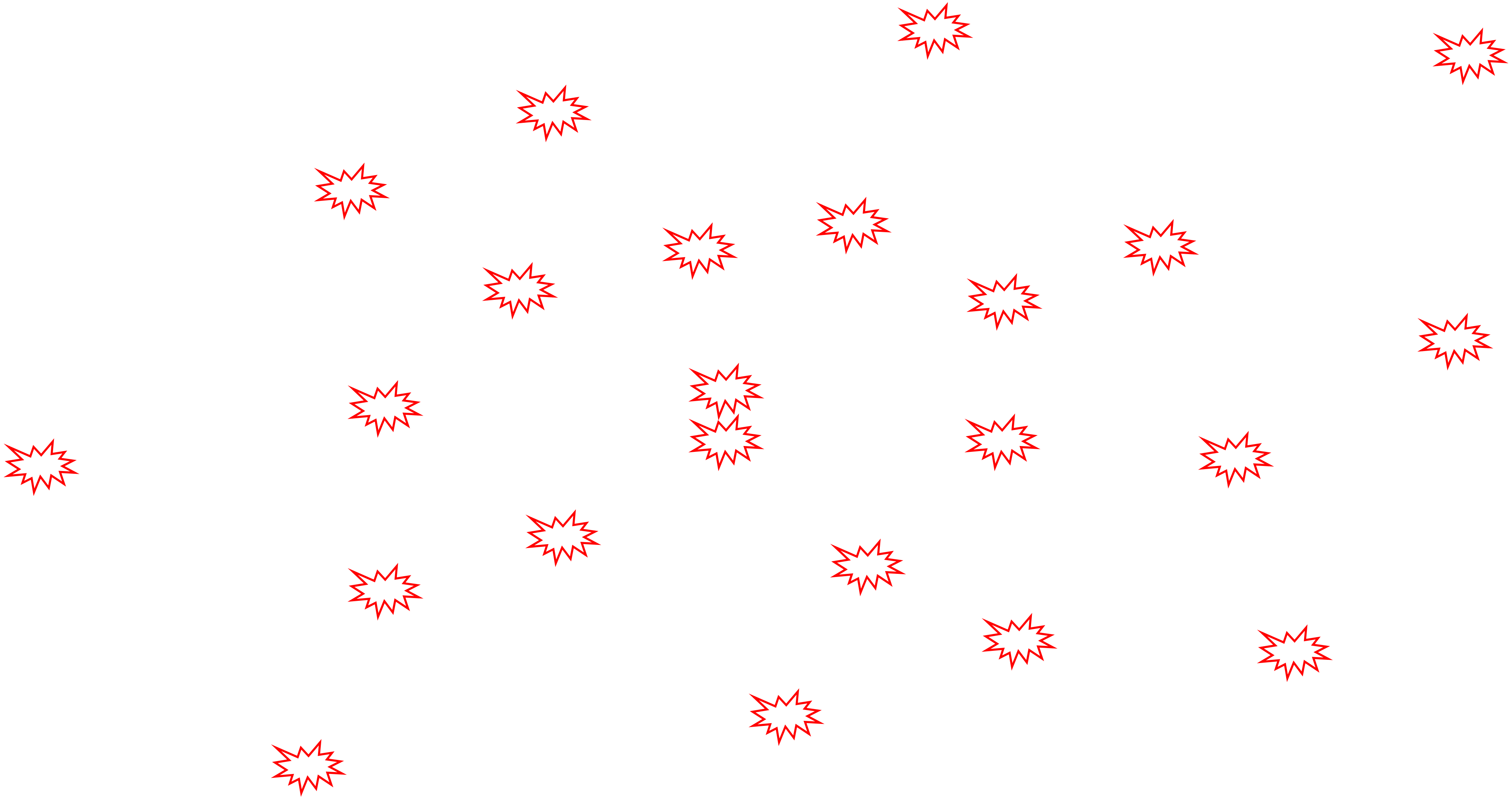


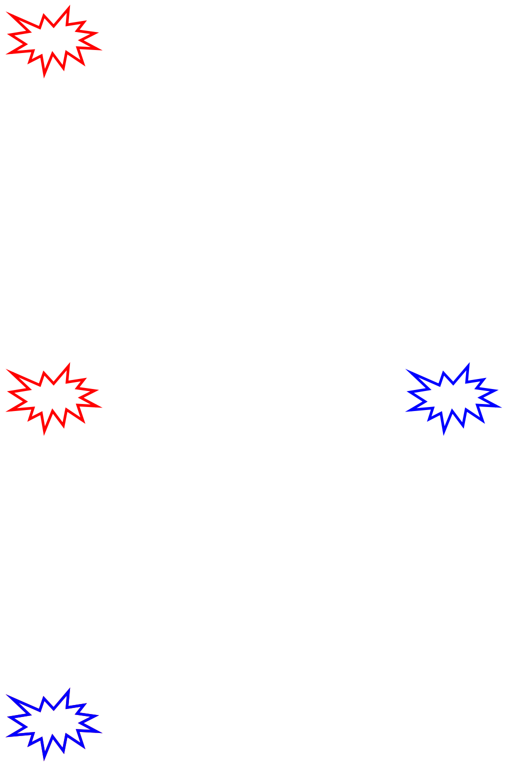
- Michelson-Morley experiment (1887)
- **광속 불변**
- 시간 지연, 길이 수축, 로렌츠 변환, 동시성의 상대성, …
- 시간과 공간의 병합
- 새로운 인과 관계
- 상대론적 역학
- 특수 상대성 이론 or 상대성 원리 (1905)



✓ 새로운 접근 방법

“시간과 공간의 기본 개념”





- 어떻게 이 것(사건)을 표시하나?

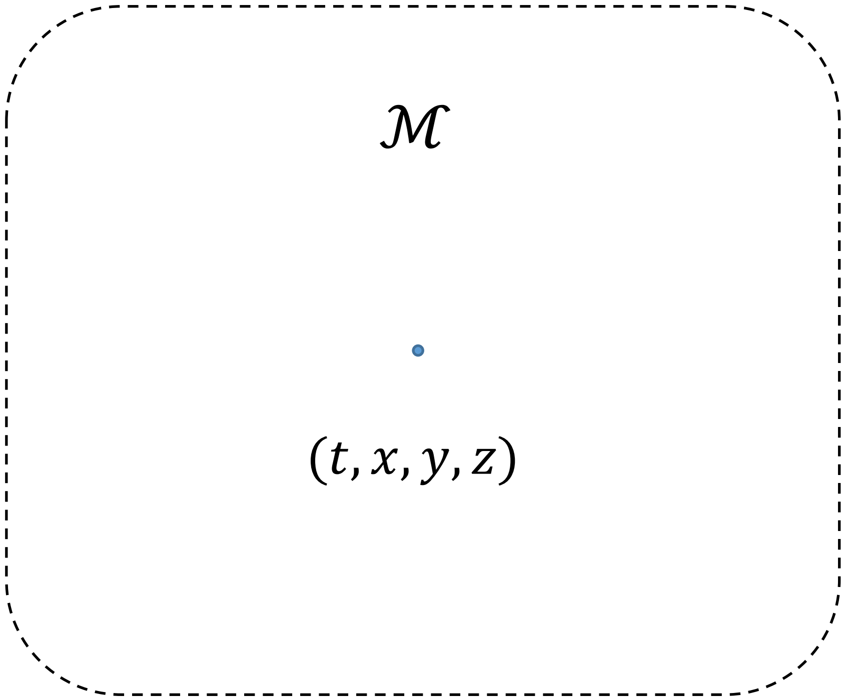
- 어디서? ➔ "위치/장소": (x, y, z)

- 언제? ➔ "시각(시간)": t

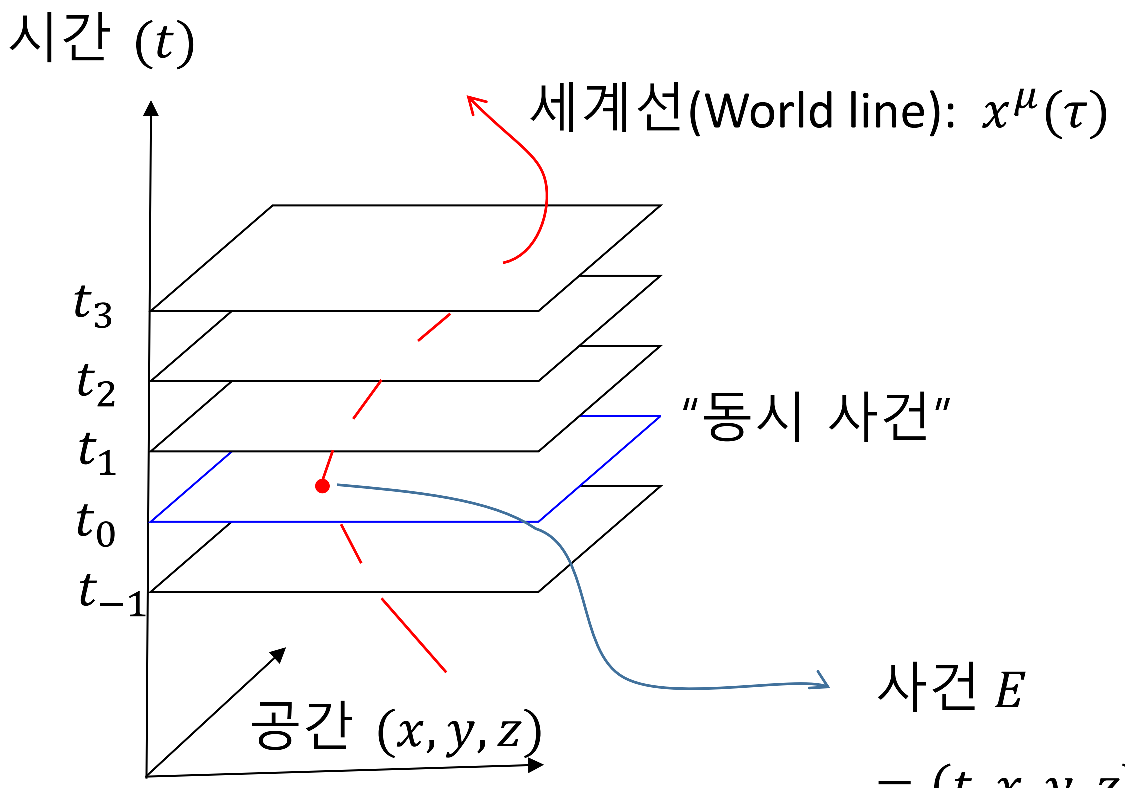
➔ "사건": $E = (t, x, y, z)$ 시공간 좌표

시공간($\boldsymbol{\mathcal{M}}$) = “사건의 집합”

= "사건의 **4**차원 연속체"



• 시공간 도표(Spacetime Diagram)



사건 E

$$= (t, x, y, z)$$

$$= (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$\equiv x^{\mu} \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

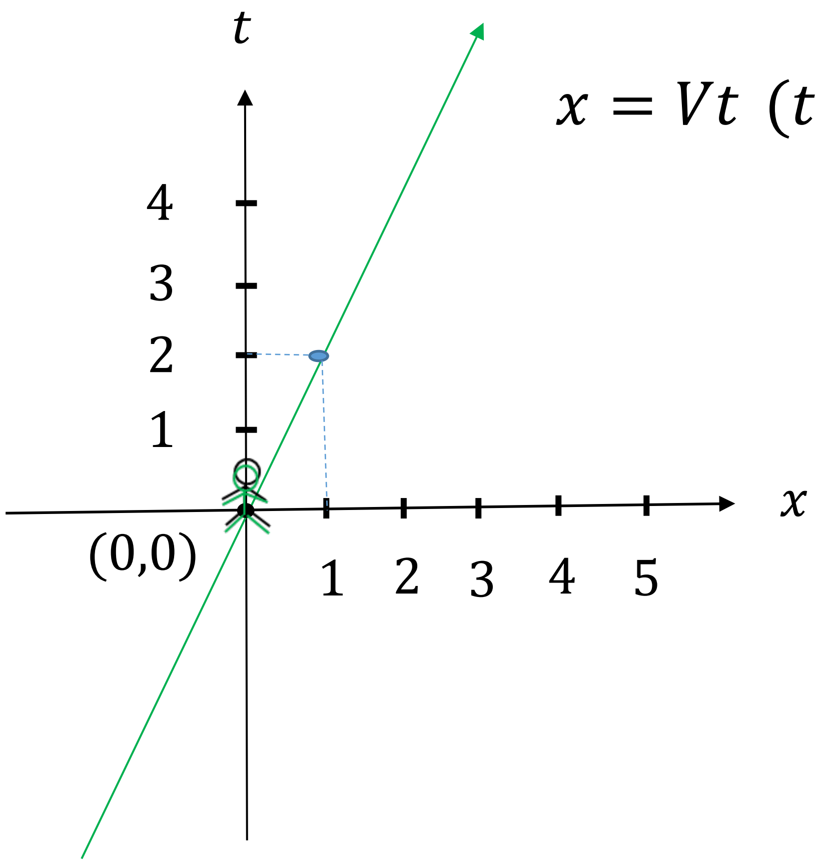
• 세계선 연습(1): 등속 운동

$\Rightarrow$ V = 일정

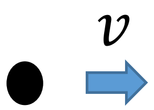
x = 속도×시간 = Vt

(t,x)	(t,x)
(0,0)	(0,0)
(1,0)	(1,0.5)
(2,0)	(2,1.0)
(3,0)	(3,1.5)
⋮	⋮

$$x = Vt \ \left(t = \frac{1}{V}x\right)$$



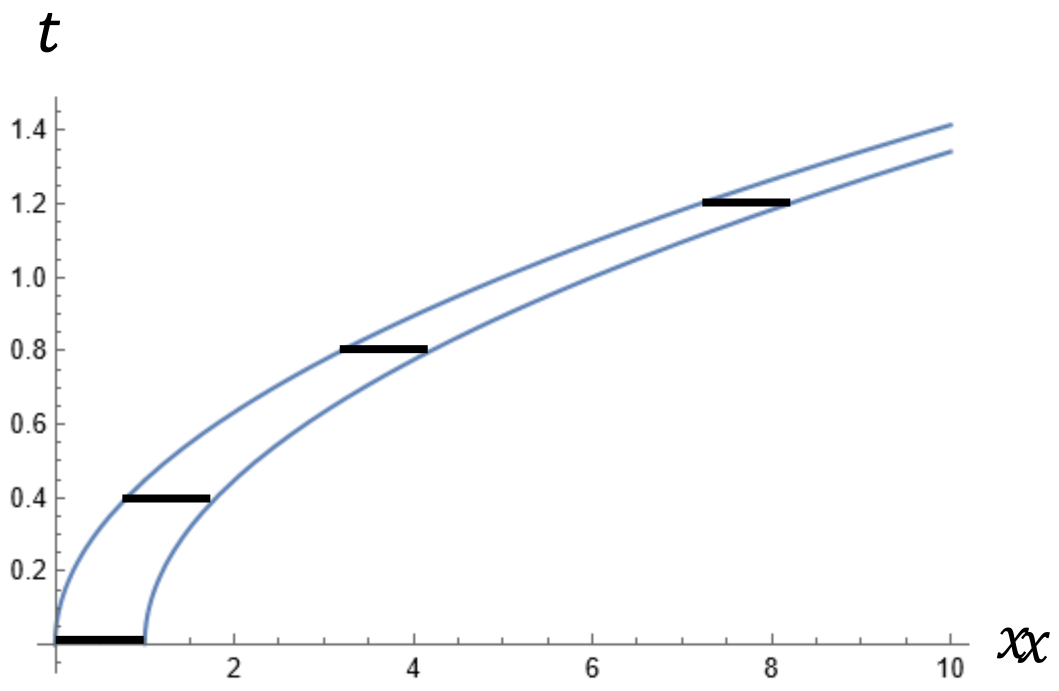
- **세계선 연습**(2): 등가속 운동



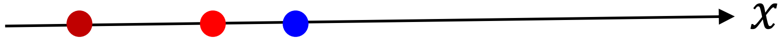
$v(t) =$ 일정하게 증가

➔ $x = x_0 + \frac{1}{2}at^2$

막대: L

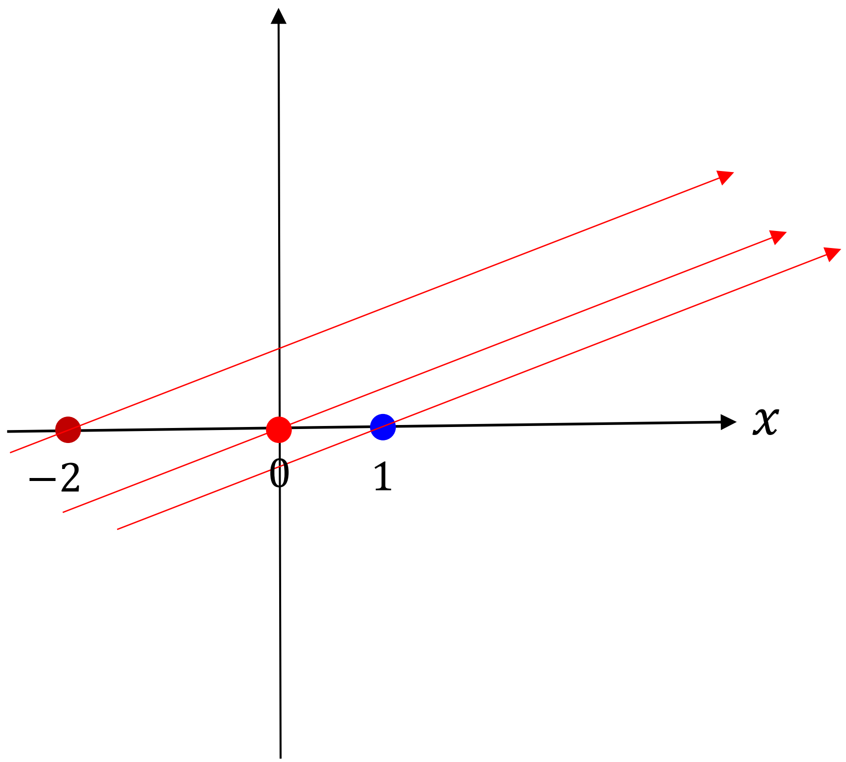


- **세계선 연습**(3): 빛의 경로($V = c$)

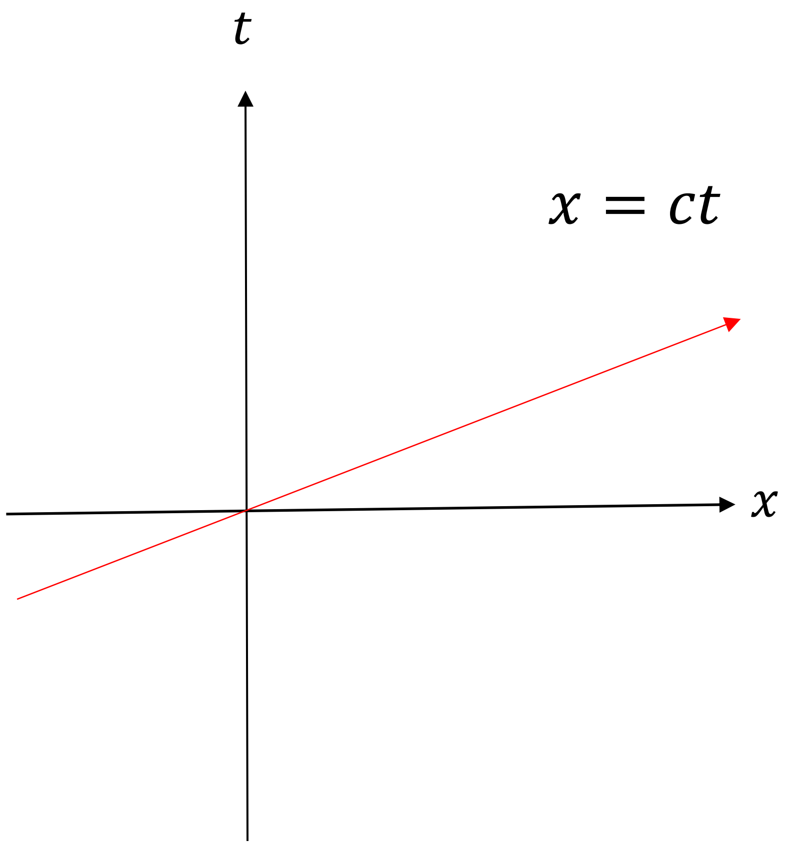


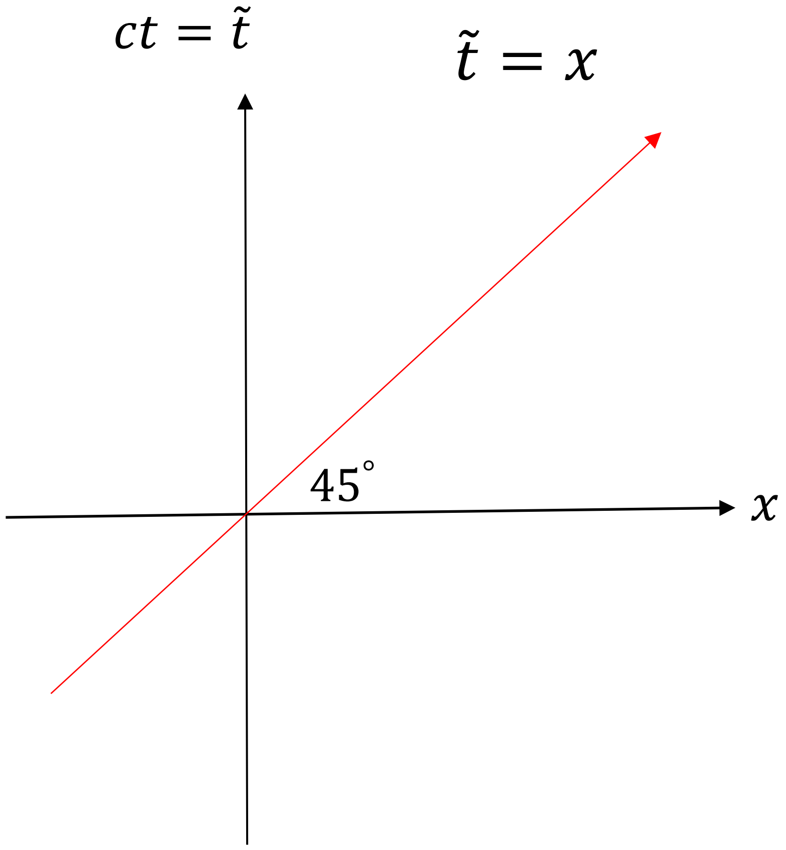
$x_0 = -2, \quad 0, \ 1$

$x = ct + x_0$

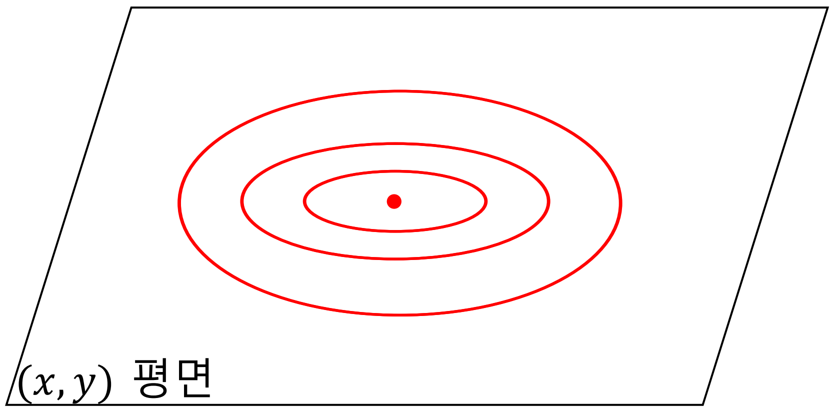


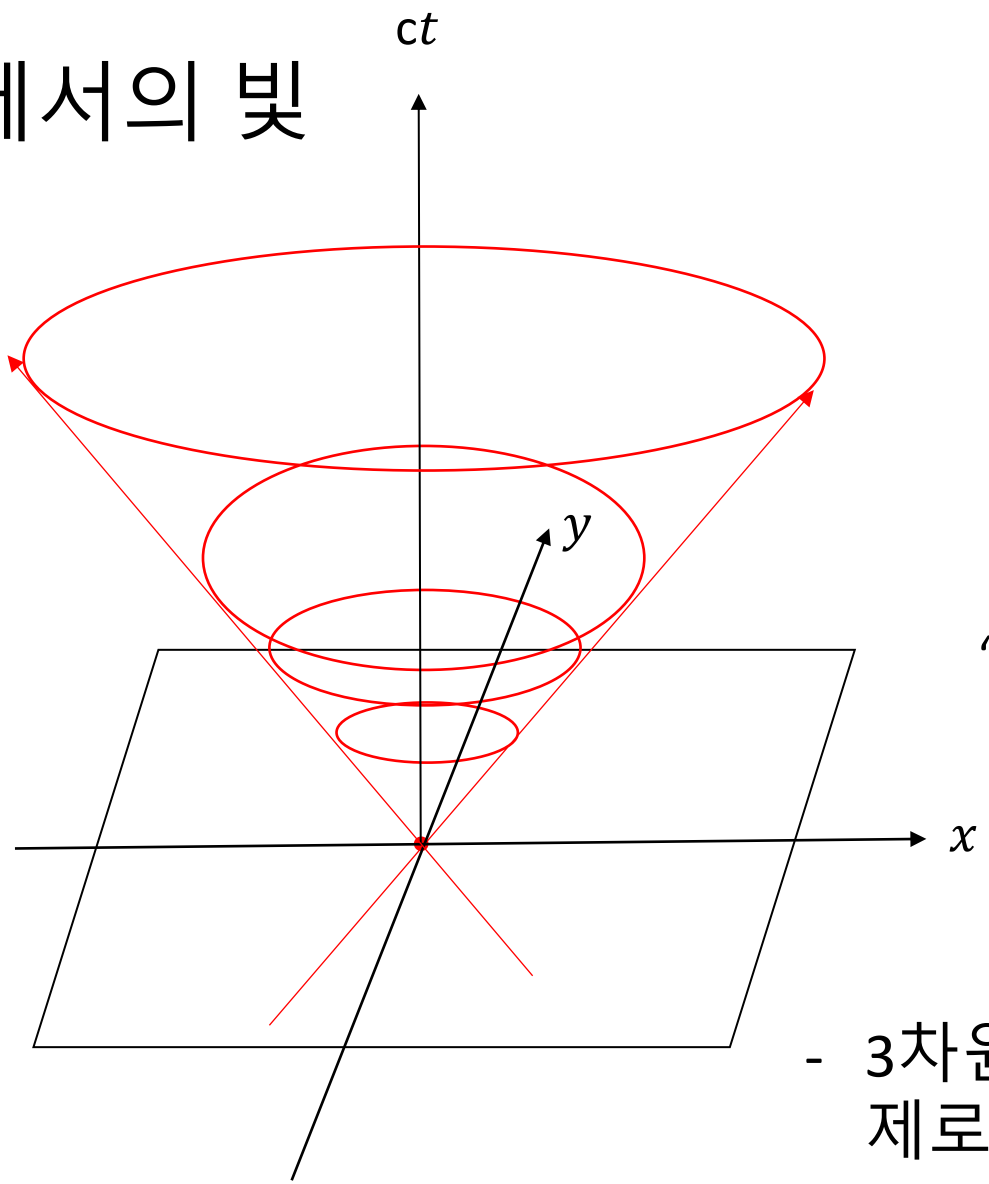
- **시간 축의 척도 변경:** $Vt \rightarrow c \times t$

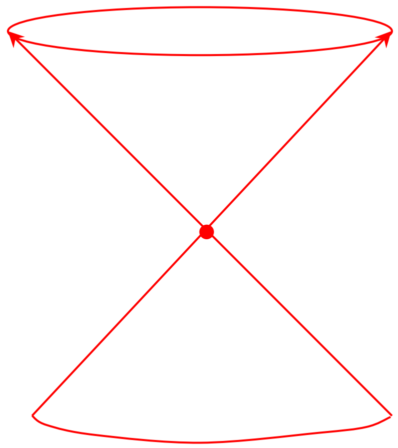




- **세계선 연습**(4): 평면에서의 빛





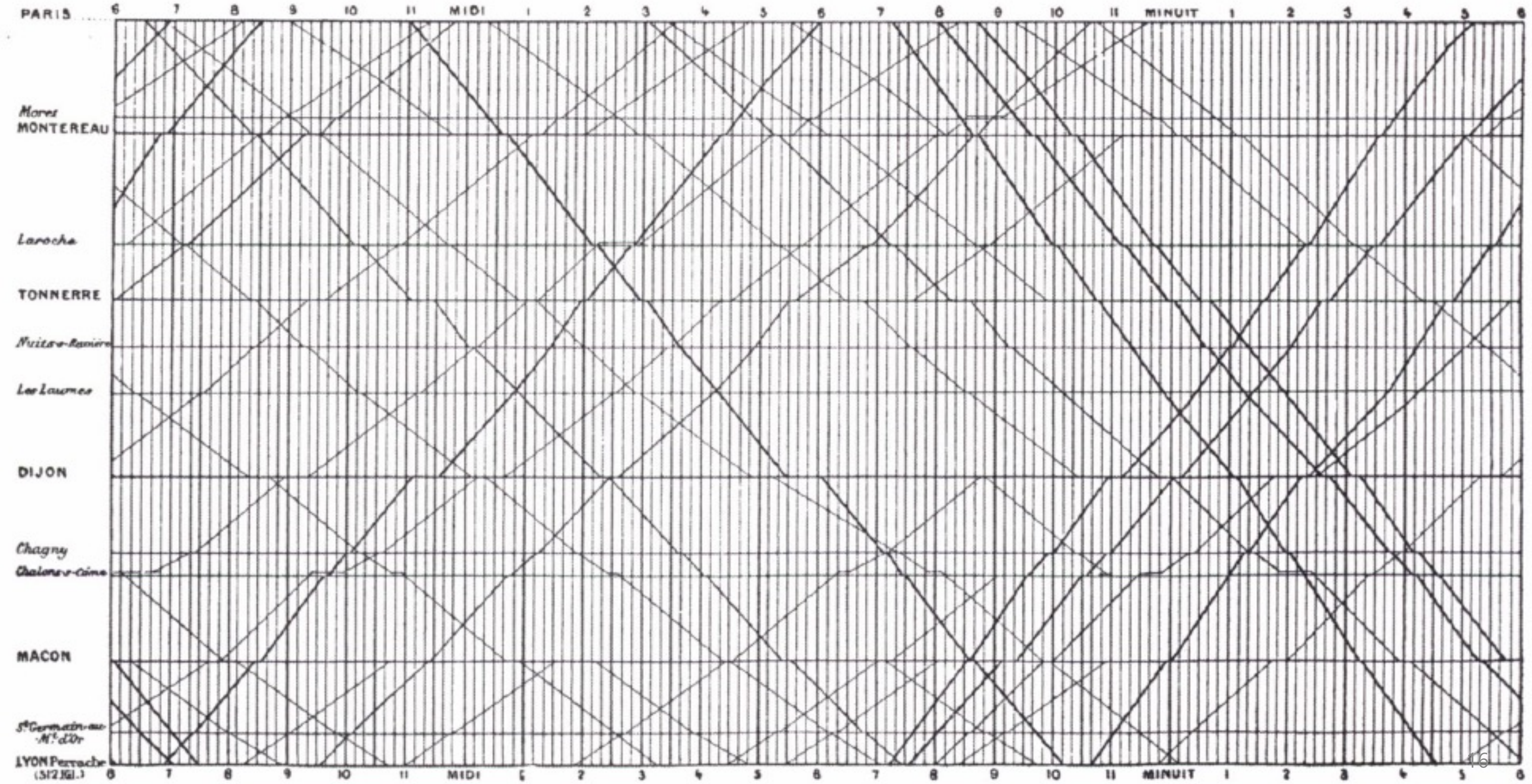


"광뿔(Light-cone)"

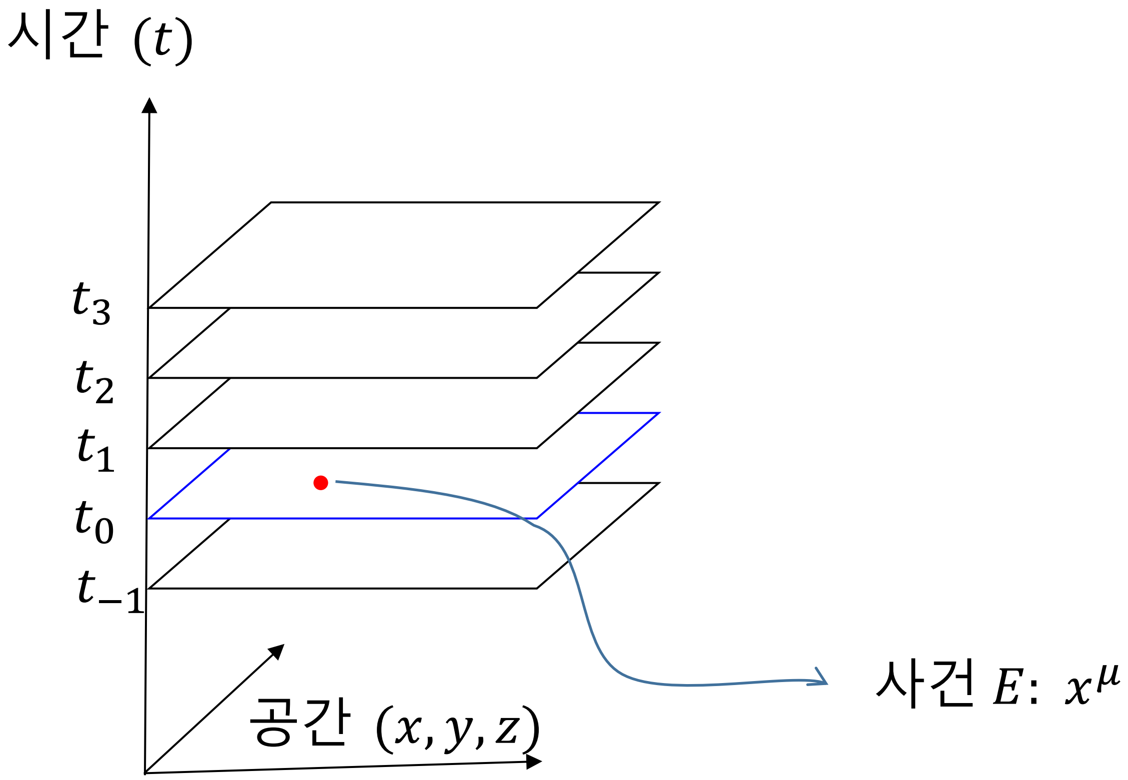
- 3차원의 경우 원은 실제로는 구면을 나타냄

BOX 4.2 Railway Trains in Spacetime : 파리 - 리옹(1885(?))

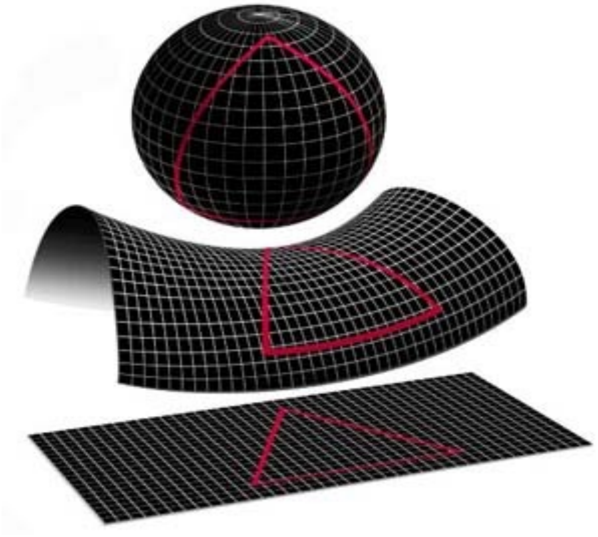
(그림 출처: Hartle)



✓ 메트릭 구조



- “사건” 자체가 물리적인 실체인가?
- **“사건”과 “사건“ 사이의 관계, 즉 “거리”가 물리적인 실체**
- **임의의 두 사건간의 거리:** 공간적 거리, 시간적 거리, ……



- **내각의 합:**

$> 180°$

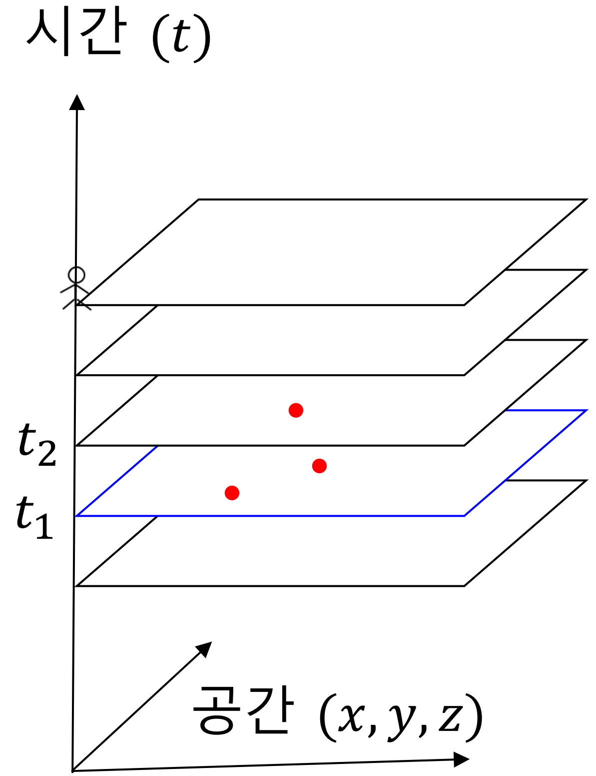
$< 180°$

$= \pi$

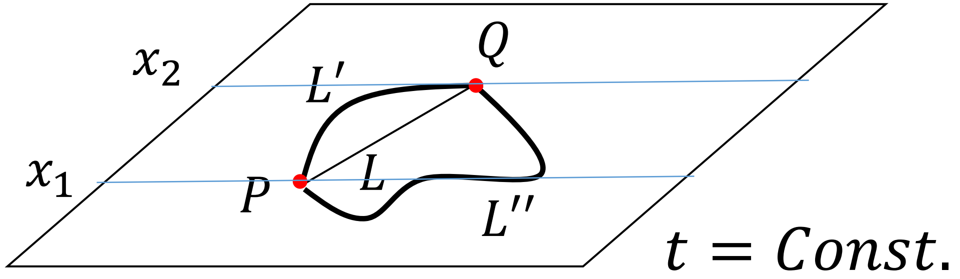
(출처: NASA)

✓ "두 사건 간의 공간거리 "

$$P = (t_1, x_1, y_1, z_1) \sim Q = (t_2, x_2, y_2, z_2)$$



- **다른 위치 동시 사건($t_1 = t_2$):** "공간적" 거리

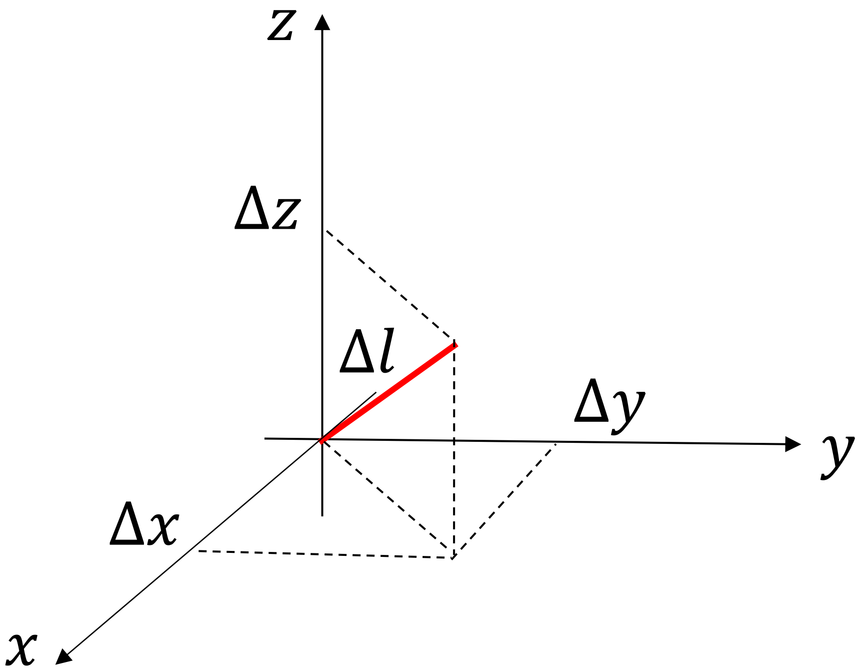


$\boldsymbol{L < L' < L''}$

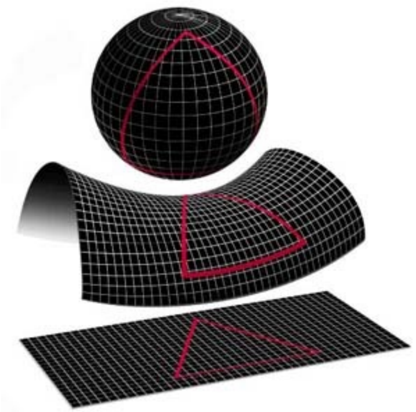
- 좌표 간격: $\Delta x = x_2 - x_1$ 경로와 무관

- 거리: 두 사건을 잇는 경로에 따라 다름

- **편평한 유클리드 3차원 공간:**



$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$
$$= \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$



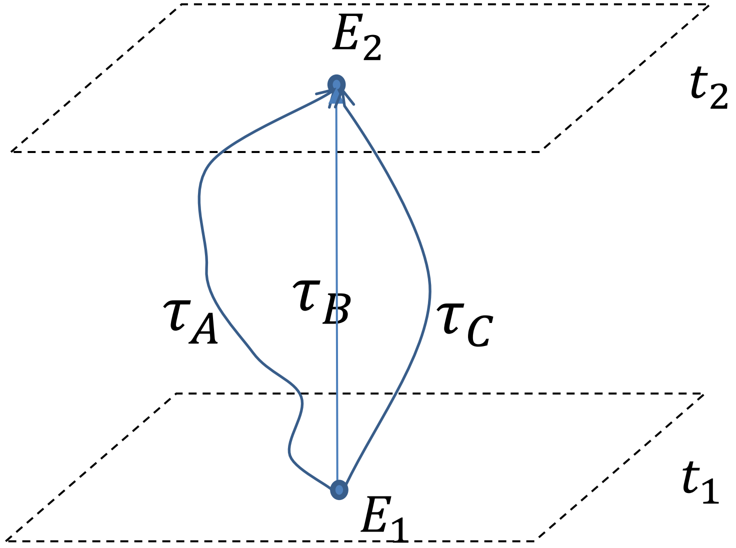
(출처: NASA)

$dl^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$: 3차원 구

$dl^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$: 3차원 말안장

$dl^2 = d\psi^2 + \psi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$

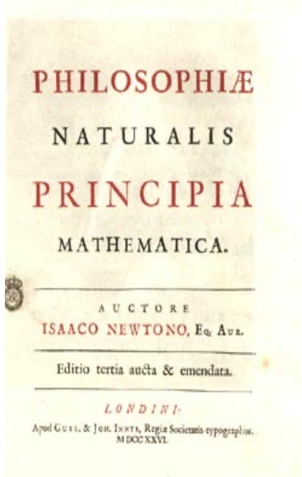
- **다른 시각($\boldsymbol{t_1 \neq t_2}$):** "시간적" 거리



- 시간 간격: $\tau_A = t_2 - t_1 = \tau_B = \tau_C$
- 두 사건을 잇는 경로에 무관

✓ 뉴튼의 절대적 시공간

- **Principia: Newton (1687)**



(1643 – 1727)

- "**절대공간**은 그 본질상 외부의 어느 것과도 관계하지 않고 항상 동일하고 움직일 수 없는 것으로 남는다."
- "**절대적**이고 진정한, 수학적 **시간**은 그 자체로 그리고 본질상 외부의 그 어느 것과도 관계하지 않고 균일하게 흐른다."

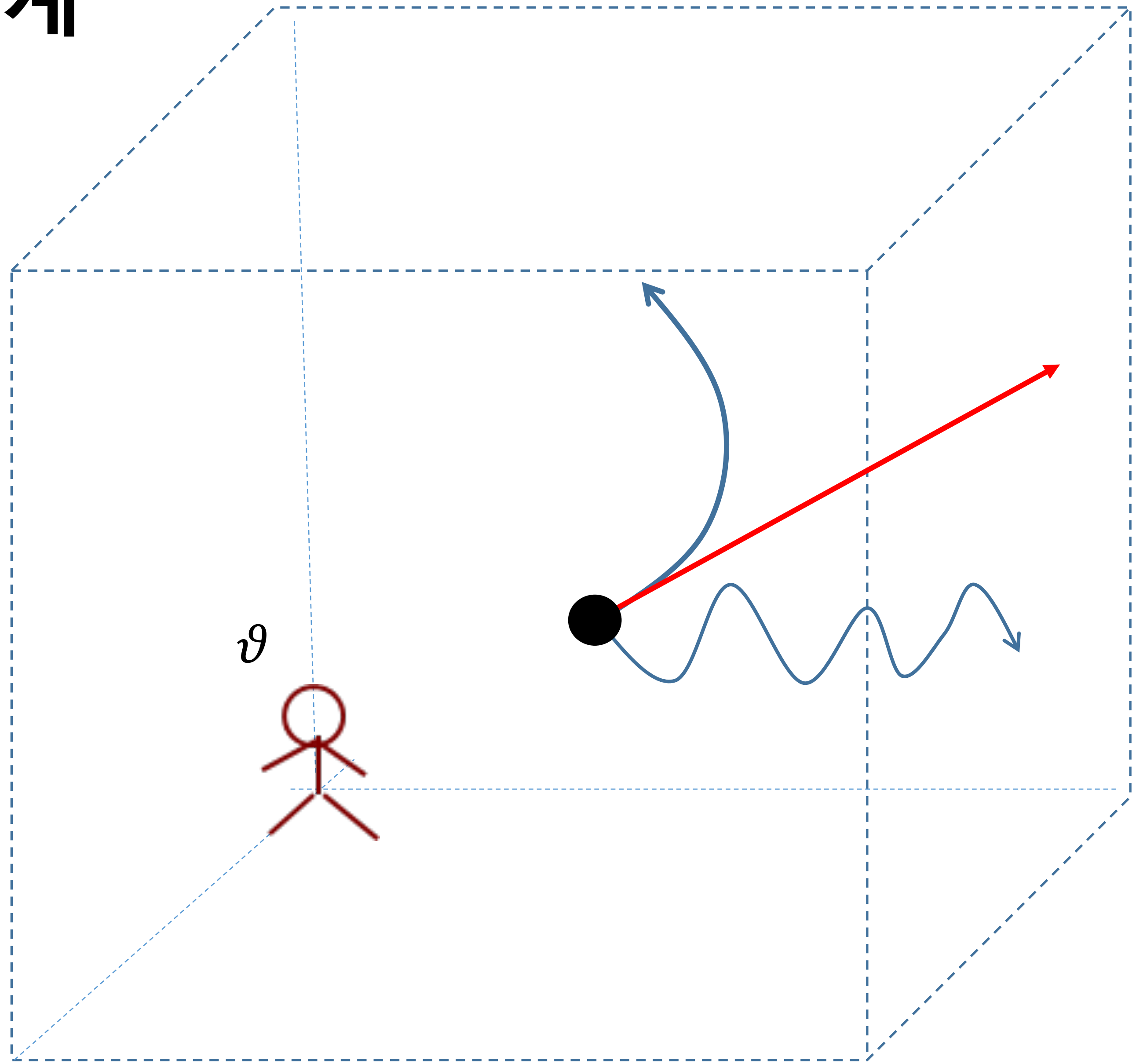
(Credit: Godfrey Kneller)

- **공간:** 연속적, 균질적, 등방적, 무한, 편평한 유클리드 3차원 공간
- **시간:** 연속적, 1차원의 균일한 흐름, 영원히 지속
- **모든 관측자에게 동일**
- **시간과 공간은 서로 독립적이며 절대적**
- **공간상에서 물체는 자유롭게 이동 가능하나 시간상에서는 불가능**
- **시간과 공간 모두 물질의 출현에 영향 받지 않음**

➔ 따라서 중력 상호작용과 시공간은 별개의 것

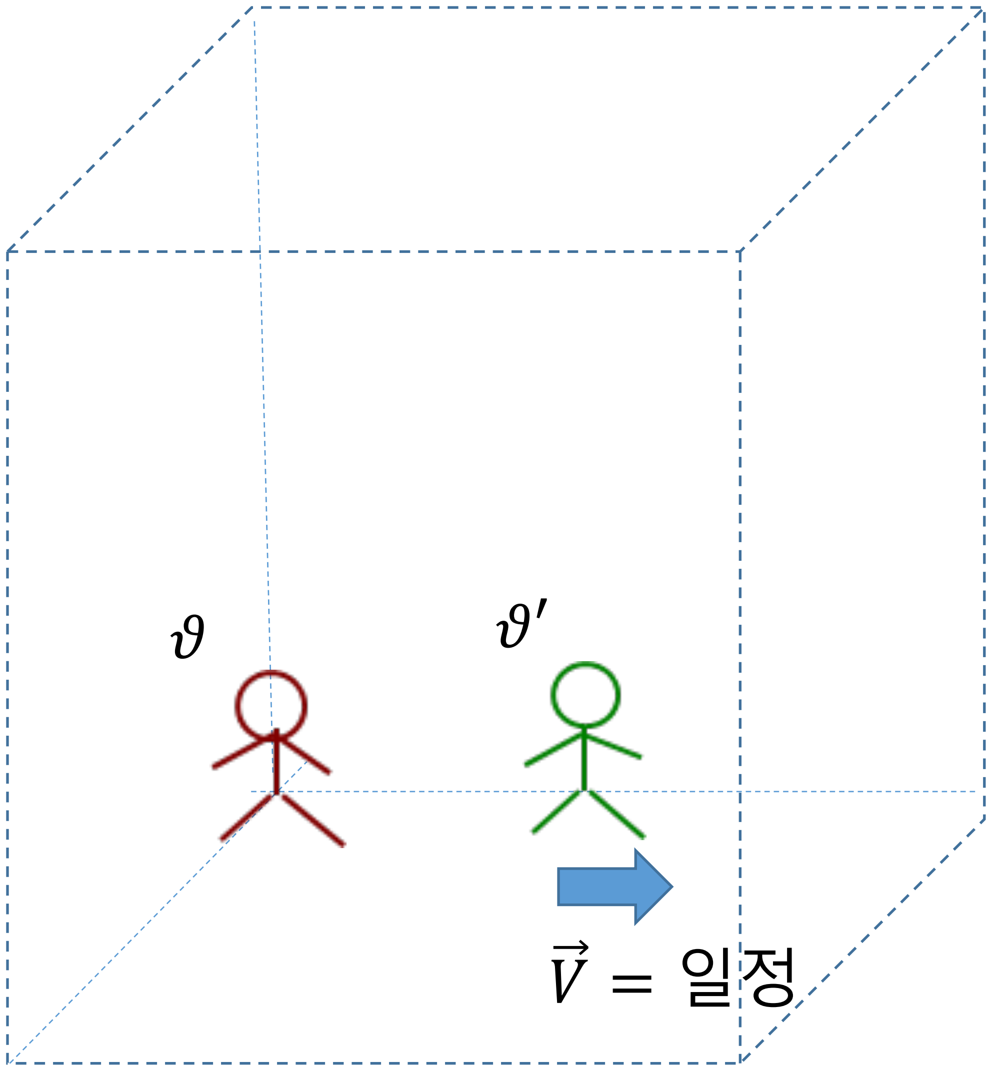
✓ 관성계

“절대 시공간에 대해 정지해 있는 관측자”



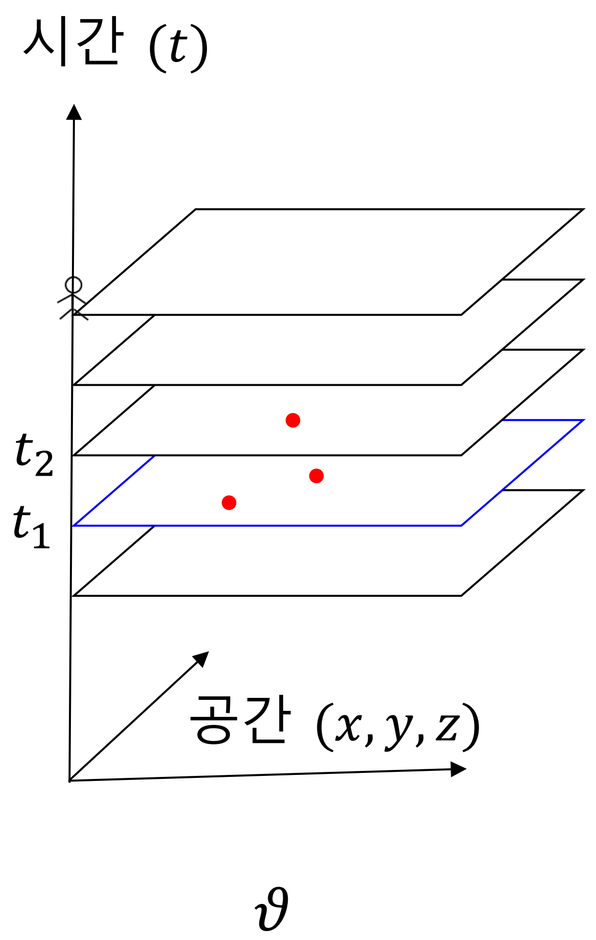
- 다양한 운동 중 매우 특별한 운동
- **“자연스러운 운동”**
- 영원히 지속하는 운동
- 힘을 받지 않는 운동
- 정지 혹은 직선 운동
- 등속도 운동: $\vec{v}$ = 일정
- 가속도 $\vec{a} = 0$
- 관성 운동
- **측지선 운동(Geodesic motion)**

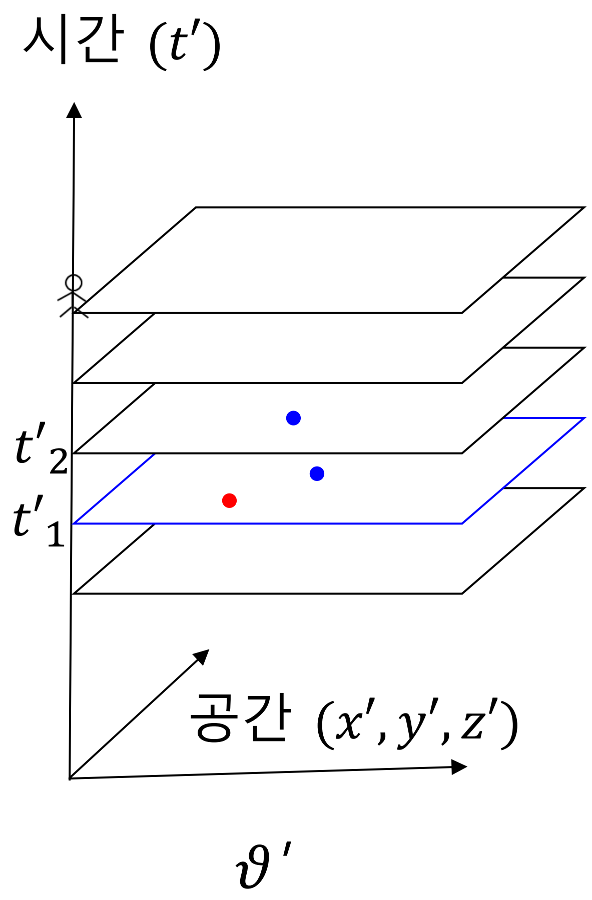
• 또 다른 관성계



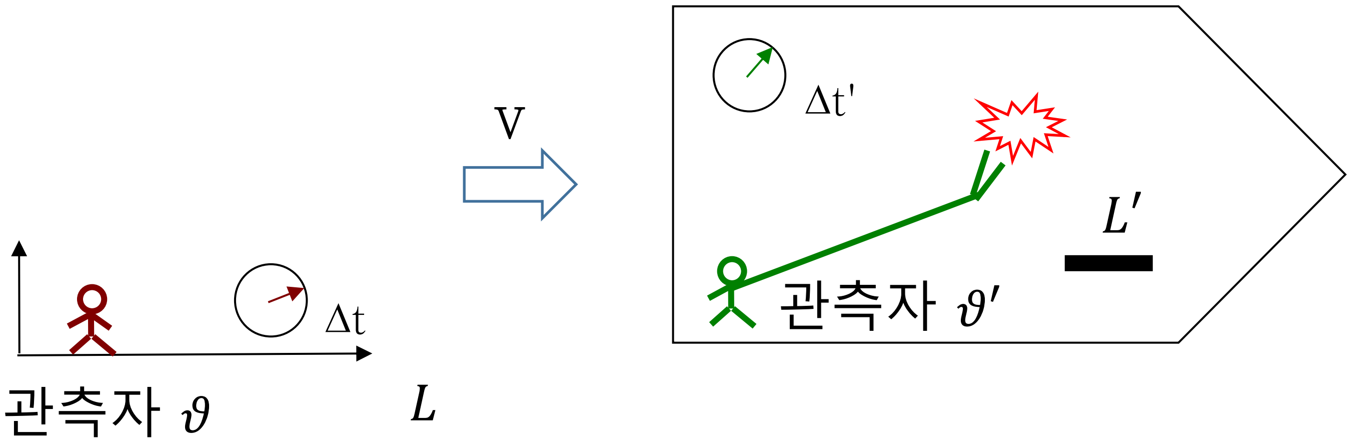
- ϑ 가 관성계이면 ϑ'도 관성계
- 두 관측자 중 절대적으로 누가 정지해 있고 누가 움직이는지 구별할 수 없음
- 단지 상대적인 운동만 있을 뿐
- 무한히 많은 관성계
- 두 관성계에서 보는 시공간은?

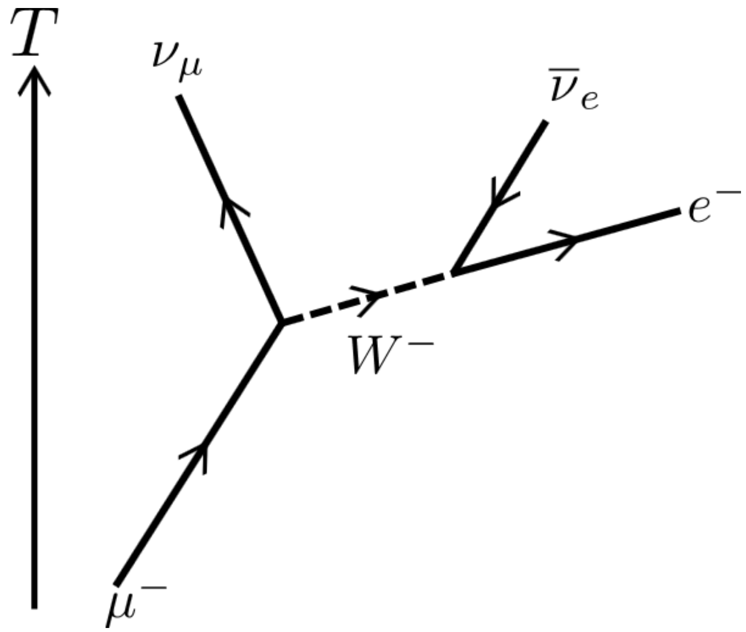
➔ 동일


시간 (t)
t_2
t_1
공간 (x, y, z)
ϑ


시간 (t')
t'_2
t'_1
공간 (x', y', z')
ϑ'

✓ 관측자의 운동 상태와 시공간





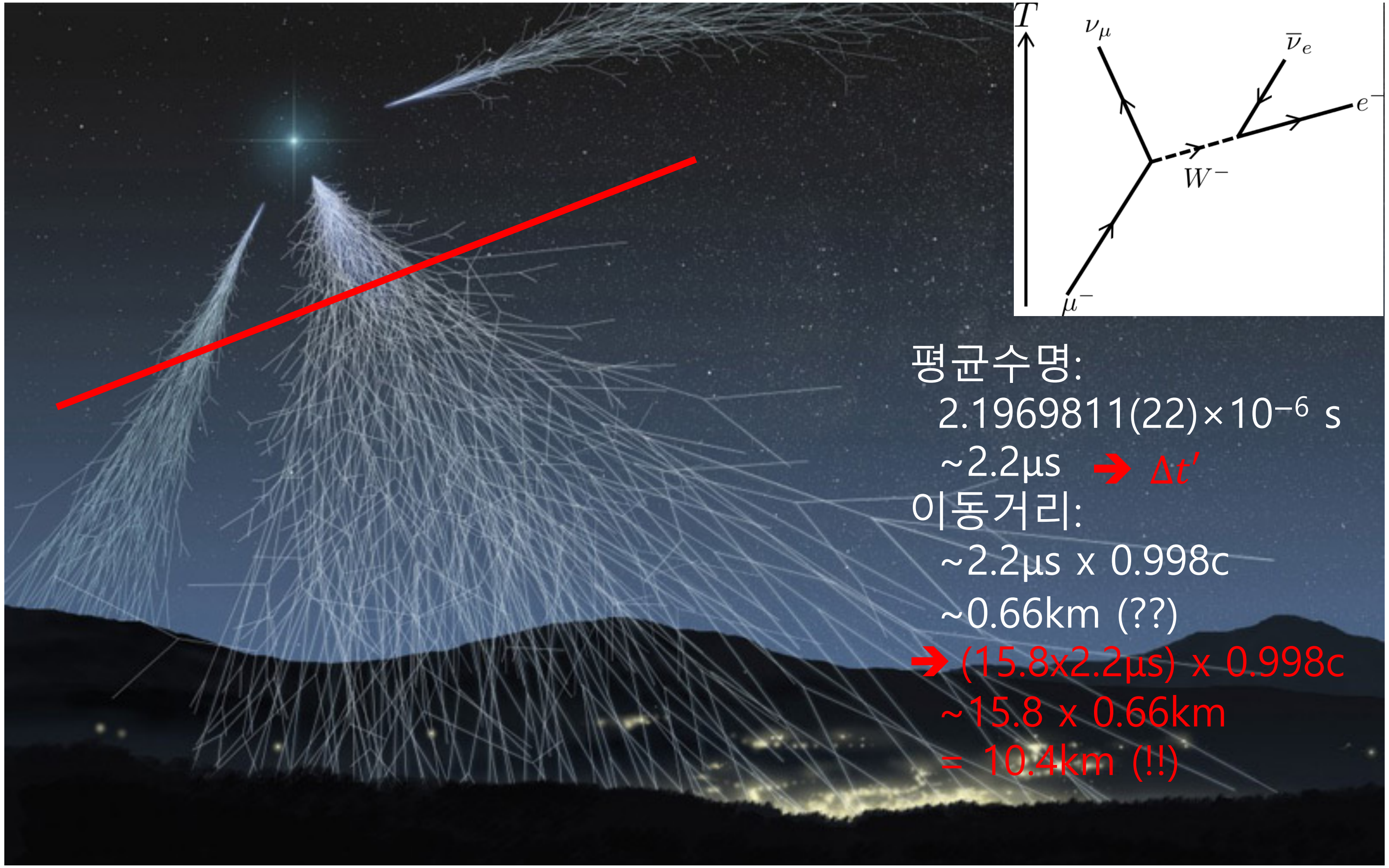
$$\boldsymbol{\Delta t = \Delta t'}\ ?$$

$$\boldsymbol{L = L'}\ ?$$

- 뮤온의 수명?

$$\Delta T_{\vartheta} = \Delta T_{\vartheta'} ?$$

❖뮤온 검출의 미스터리:

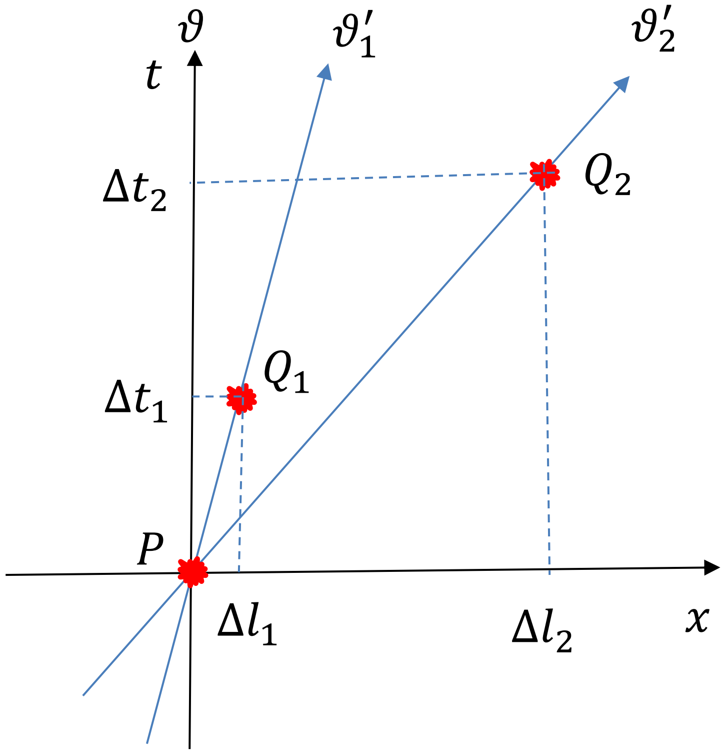


$V_{뮤온} \sim 0.998\ c$

$$\Delta t = \Gamma_{뮤온} \Delta t' \sim 15.8\ \Delta t'$$

특수상대론적 시공간의 거리 구조

- **가상 실험**



예1) $V_1 = 1\ m/s$ 의 속도로 움직이는 ϑ_1' :

$(\Delta t_1', \Delta l_1') = (1\ sec, 0\ m) \leftrightarrow (\Delta t_1, \Delta l_1)_{뉴튼} = (1\ s, 1\ m)$ $\leftrightarrow (\Delta t_1, \Delta l_1) = (1.000 \cdots 6\ s, 1.000 \cdots 6\ m)$

예2) $V_2 = 0.9 \times (3 \times 10^8\ m/s)$ 의 속도로 움직이는 ϑ_2' :

$(\Delta t_2', \Delta l_2') = (1\ sec, 0\ m) \leftrightarrow (\Delta t_2, \Delta l_2)_{뉴튼} = (1\ s, 2.7 \times 10^8\ m)$ $\leftrightarrow (\Delta t_2, \Delta l_2) = (2.29\ s, 6.19 \times 10^8\ m)$

$$\Delta s_1'^2 = -(c\Delta t_1')^2 + (\Delta l_1')^2 = -\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\times1\ s\right)^2 + 0 = -9.00\cdots0\times10^{16}\ m^2$$

$$\Delta s_1^2 = -(c\Delta t_1)^2 + (\Delta l_1)^2 = -(3\times10^8\times1.00\cdots6)^2 + (1.00\cdots6\ m)^2$$

$$= (-9\times10^{16}\times1.00\cdots4 + 1.00\cdots4)\ m^2$$

$$= (-9\times1.00\cdots4 + 1.00\cdots4\times10^{-16})\times10^{16} m^2 \cong -9.00\cdots4\times10^{16}\ m^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \Delta s_1^2 \cong \Delta s_1'^2}$$

$$\Delta s_2'^2 = -(c\Delta t_2')^2 + \Delta l_2'^2 = -\left(3\times10^8\,\frac{m}{s}\times1\ s\right)^2 + 0 = -9.00\times10^{16}\ m^2$$

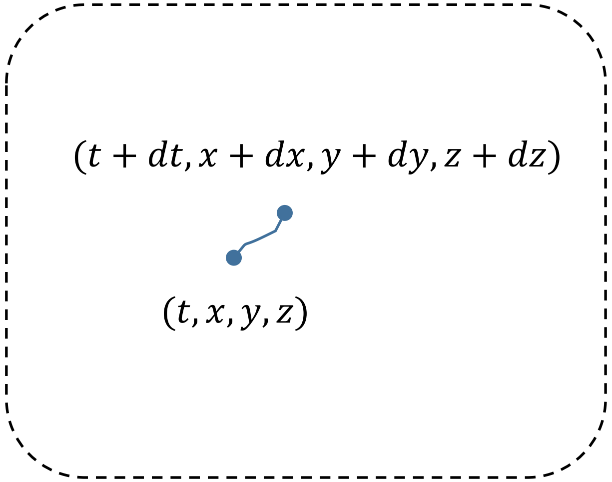
$$\Delta s_2^2 = -(c\Delta t_2)^2 + \Delta l_1^2 = -(3\times10^8\ m/s\times2.29\ s)^2 + (6.19\times10^8\ m)^2$$

$$= (-47.2 + 38.3)\times10^{16}\ m^2 = -8.90\times10^{16}\ m^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \Delta s_2^2 \cong \Delta s_2'^2}$$

✓ 특수상대론적 시공간(Special relativistic ST)

$\mathcal{M}$



- **거리(메트릭) 구조(Line element):**

$$\boxed{ds^2 = -d(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

- 밍코프스키(Minkowski) 시공간
- 편평한 시공간: "곡률 (Curvature)" = 0
- <u>로렌츠 공간</u> vs 유클리드 공간
- **"시간"과 "공간"은 분리할 수 없고 절대적이지도 않다!**

➔ 시공간 복합체!

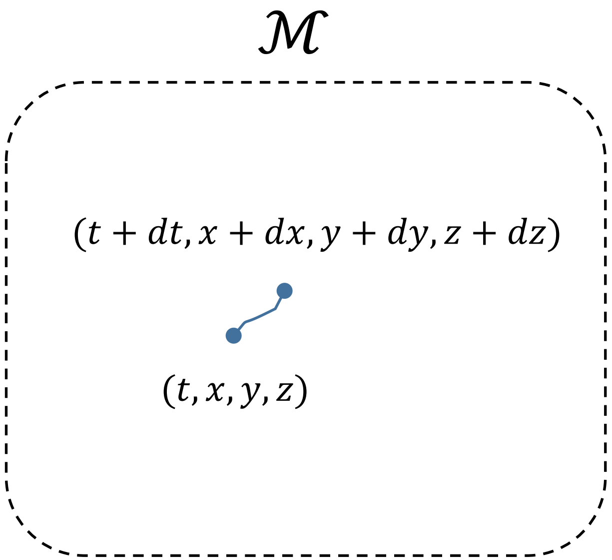
$\Delta l = \Delta l',\ \Delta t = \Delta t'$ 이 아니고,

$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta l^2$

$= -(c\Delta t')^2 + \Delta l'^2 = \Delta s'^2$

관성계 구분 불가능

➔ $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$



$$ds^2 = -d(ct)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$\mathrm{ds}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$$= \eta_{00}(dx^0)^2 + \eta_{01} dx^0 dx^1 + \cdots$$

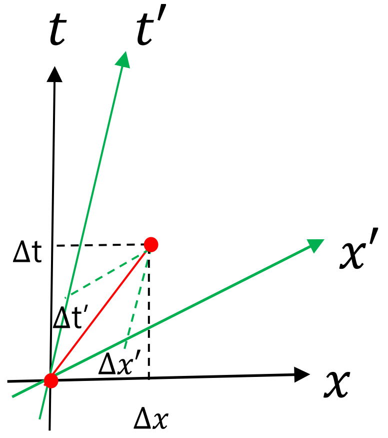
Minkowski metric:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ or } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

직교 좌표계 극좌표계

- **모든 특수상대론적 성질들은 이러한 메트릭 구조의 산물:**

Ex1) 광속 불변:



$(c = 1)$

특별한 경로: $\Delta s^2 = 0$

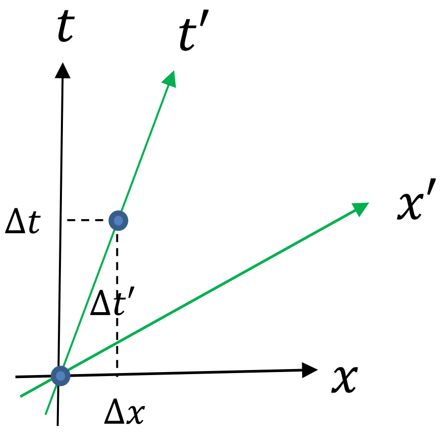
$$0 = \Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2$$

$$\Rightarrow \quad c_\vartheta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c\Delta t}{\Delta t} = c$$

$$c_{\vartheta'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{c\Delta t'}{\Delta t'} = c = c_\vartheta$$: 광속 동일(불변)!

Ex2) 시간 지연 효과:

- 관측자 ϑ': "동일 위치" $\Delta x' = 0 = \Delta y' = \Delta z'$
- 관측자 ϑ: "다른 위치" $\Delta x \neq 0 = \Delta y = \Delta z$



$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} = V \right)$

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

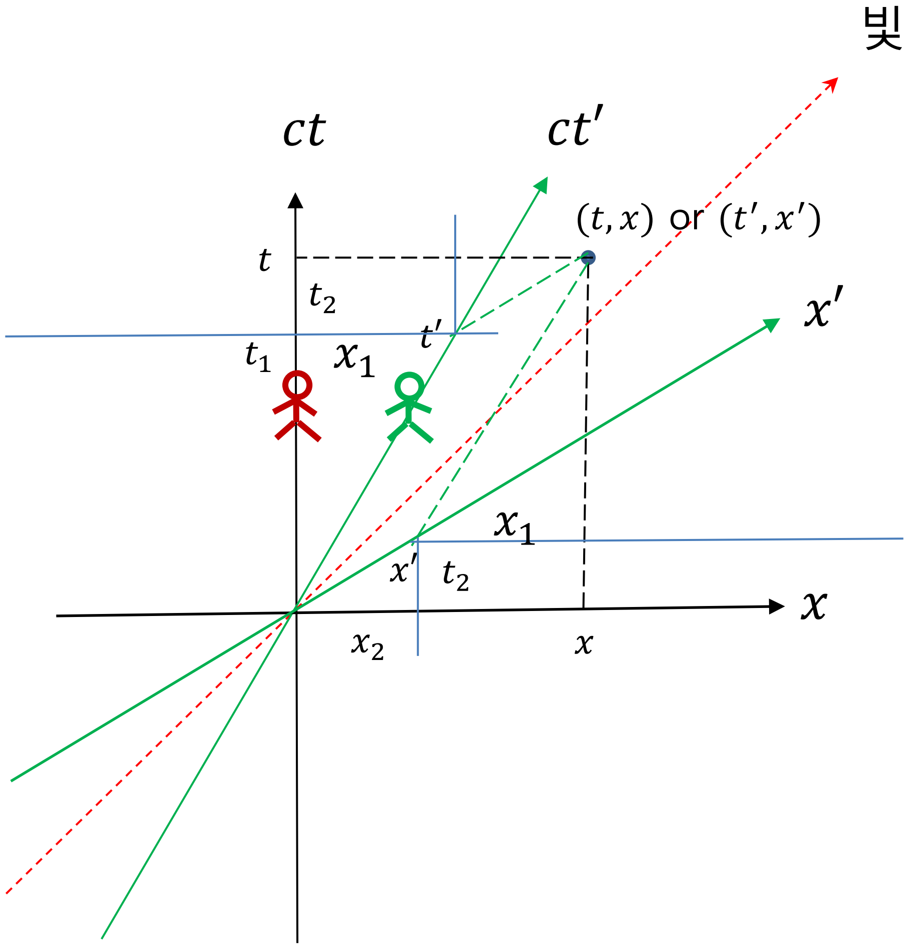
$$\Delta s'^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \Rightarrow -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta t')^2 + 0^2$$

$$(c\Delta t)^2 [1 - (\frac{\Delta x}{c\Delta t})^2] = (c\Delta t)^2 [1 - (\frac{V}{c})^2] = (c\Delta t')^2$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \Delta t'$$

Ex3) 로렌츠 변환:



$$x_1 = vt_1, -t'^2 + 0^2 = -t_1^2 + x_1^2 = -t_1^2(1 - v^2)$$

$$\Rightarrow t_1 = 1/\sqrt{1 - v^2}\, t'$$

$$t_2 = vx_2,\quad -0^2 + x'^2 = -t_2^2 + x_2^2 = -t_2^2\left(1 - \frac{1}{v^2}\right)$$

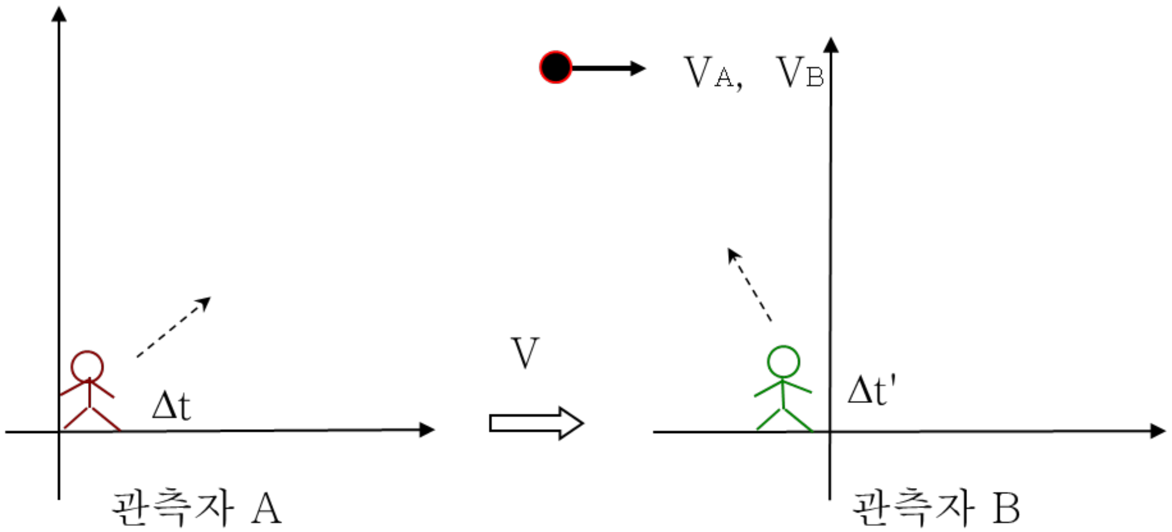
$$\Rightarrow t_2 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, x'$$

$$\therefore\ t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t' + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t' + vx')$$

마찬가지로,

$$x = x_1 + x_2 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, t' + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x' + vt')$$

Ex4) 속도 합성:



$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\Delta t' + \frac{v}{c}\frac{\Delta x'}{c}\right)$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\Delta x' + v\,\Delta t'\right)$$

$$\Delta y = \Delta y' = 0$$

$$\Delta z = \Delta z' = 0$$

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(-v/c)^2}}(\Delta x' + v\,\Delta t')}{\frac{1}{\sqrt{1-(-v/c)^2}}(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c\ \ c})} = \frac{\Delta x' + v\,\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v}{c}\frac{\Delta x'}{c}} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v}{c}\frac{\Delta x'/\Delta t'}{c}} = \frac{v_B + v}{1 + \frac{v}{c}\frac{v_B}{c}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_A = \frac{V_B + V}{1 + V\,V_B/c^2}}}$$

Note:

i) $V_A < c$ for $V_B, V < c$

ii) $V_A = c$ for $V_B = c$ (or $V = c$)

It never exceed the speed of light!

Ex5) 동시 사건:

- 두 사건: $\mathrm{P}_1 = (t_1, x_1)$ & $P_2 = (t_2, x_2)$

  $dt = t_2 - t_1 = 0$ $\rightarrow$ "동시에 발생한 사건"

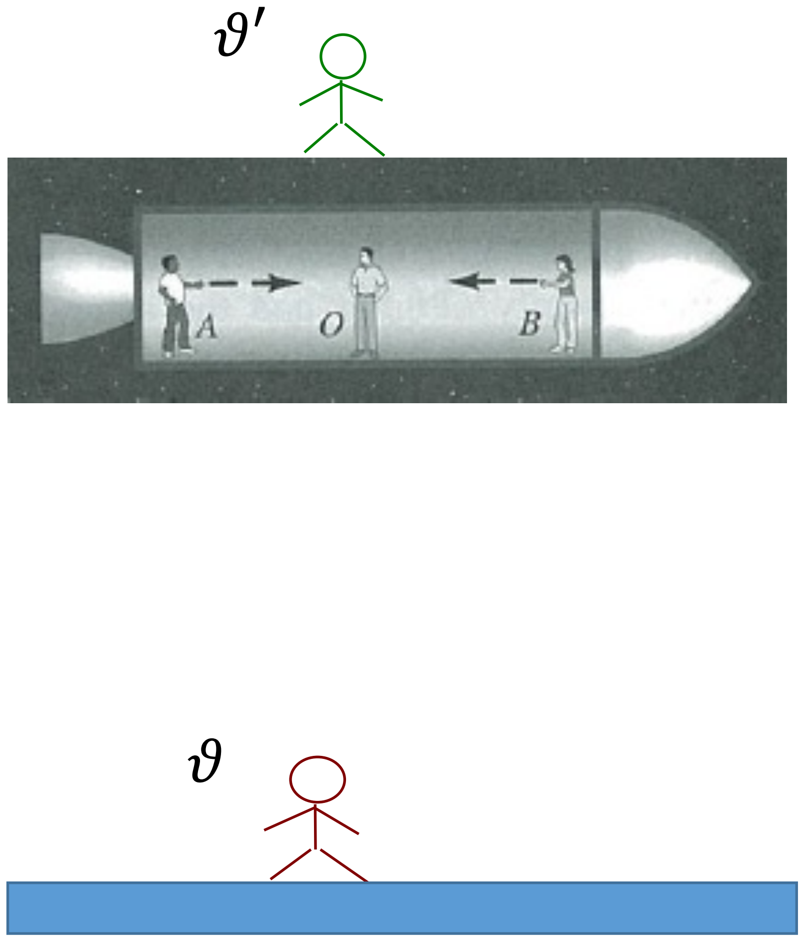
- $\mathrm{P}_1 = (t'_1, x'_1)$ & $P_2 = (t'_2, x'_2)$
  - $dt' = t'_2 - t'_1 = 0$?

- Note: $ds^2 = -dt^2 + dx^2 = dx^2 = -dt'^2 + dx'^2$

  ➔ Not necessarily $dt' = 0$ $(t'_1 = t'_2)$

  ➔ $t'_1 \neq t'_2$ **for other observers!**

✓ 동시에 발생한 사건

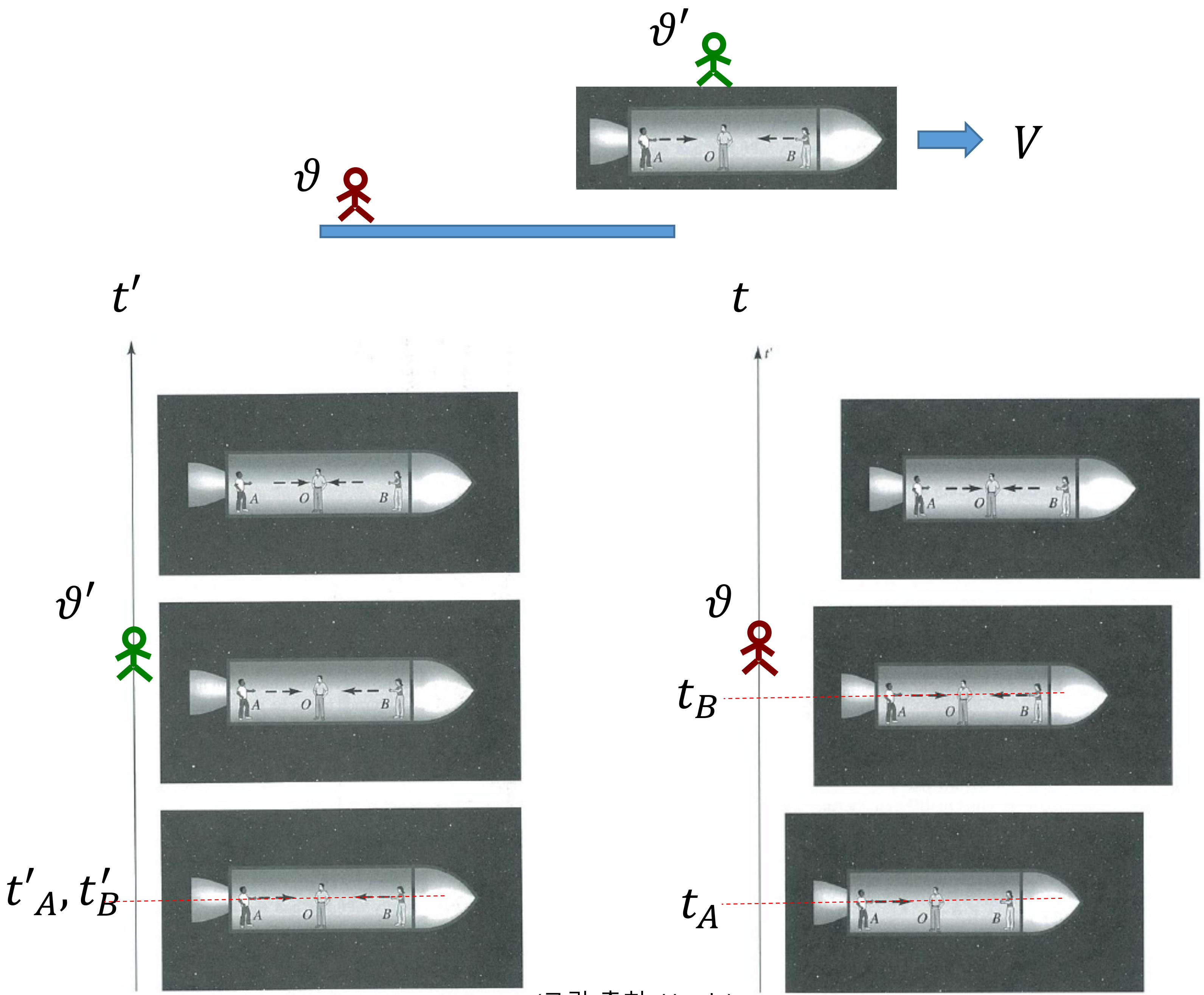


- $\boldsymbol{\vartheta'}$ **관성계:**
  - **“A와 B에서 쏜 빛이 가운데 O에서 만남”**

  ➔ A와 B에선 빛을 쏜 사건 $P(t_A'), Q(t_B')$은 동시에 발생한 사건: $t_A' = t_B'$

- **관측자** $\boldsymbol{\vartheta}$ 에게도 이 두 사건 $P(t_A), Q(t_B)$은 동시에 발생했을까?: $t_A = t_B$??

(그림 출처: Hartle)



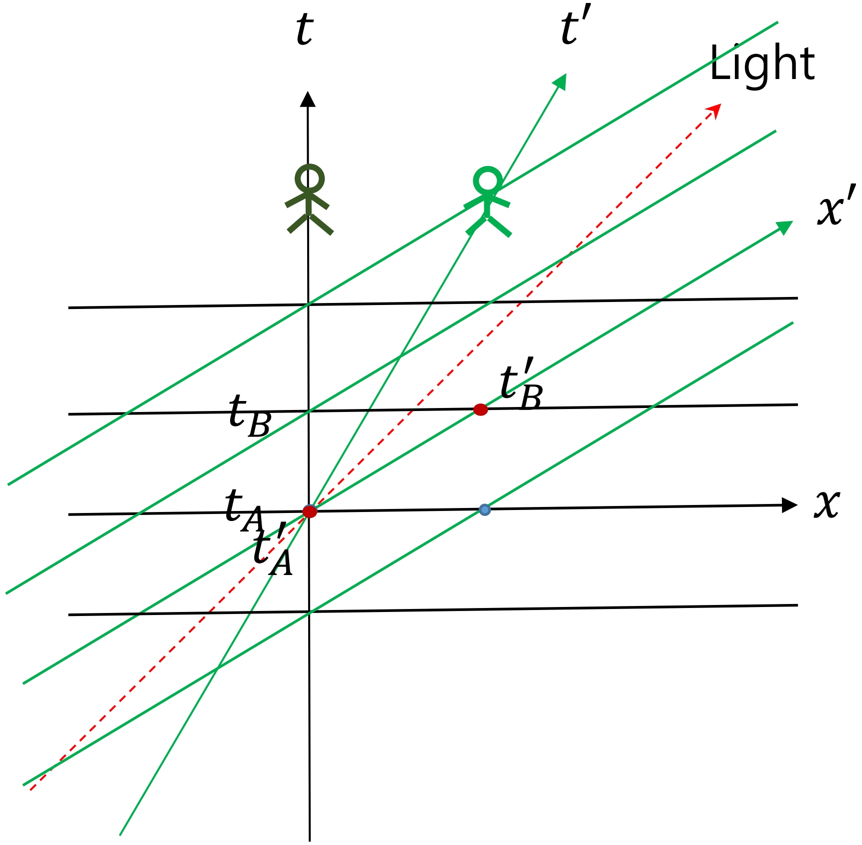
(그림 출처: Hartle)

- **관성계 $\boldsymbol{\vartheta}$:** $P(t_A)$ 와 $Q(t_B)$은 다른 시각에 발생한 사건. 즉,

$$t_A \neq t_B \; (t_A < t_B)$$

- 만약 동시에 쏘았다면 빛은 O에서 만나지 못하고 O의 왼편에서 만날 것이다.(광속 동일, O는 오른편으로 움직이고 있음)

➔ 동시성의 상대성

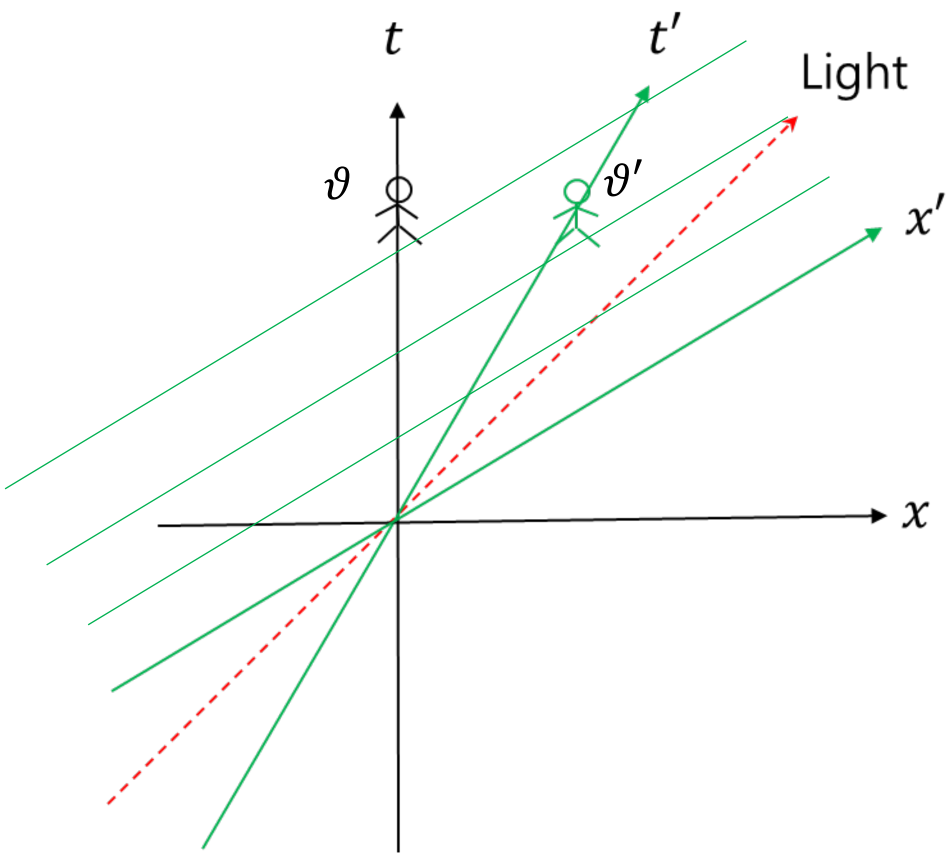


$t'_B = t'_A$

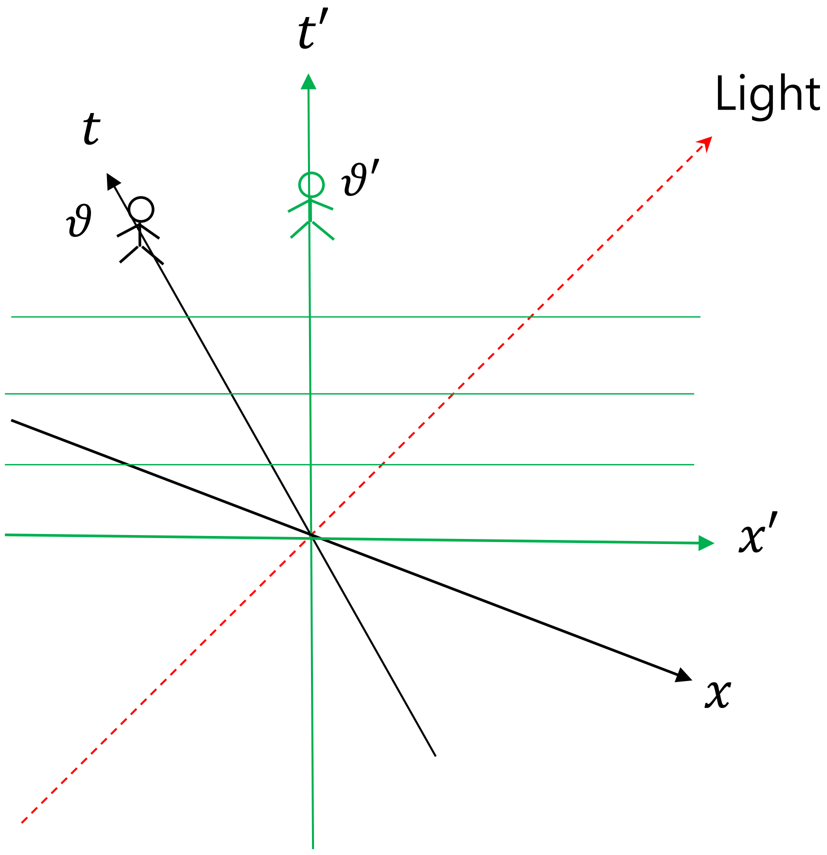
$t_B > t_A$

- 관측자 ϑ 가 보는 동시 사건들
- 관측자 ϑ 에서의 동시 사건들의 시간 진행
- 관측자 ϑ' 이 보는 동시 사건들
- 관측자 ϑ' 에서의 동시 사건들의 시간 진행

관측자 ϑ 의 관점

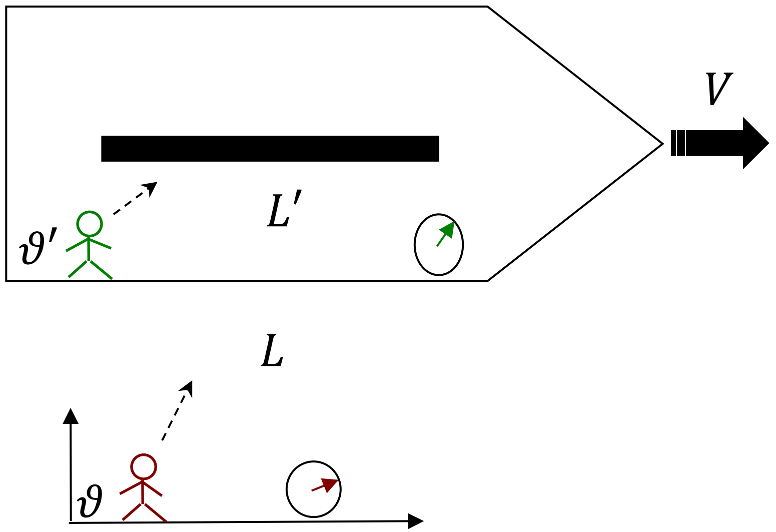


관측자 ϑ 의 관점

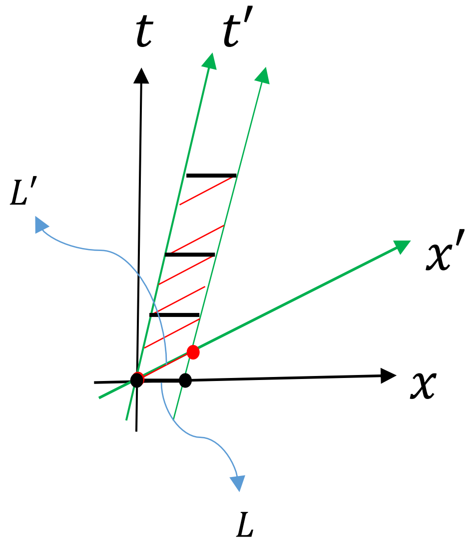


관측자 ϑ' 의 관점

Ex6) 길이 수축:



- **<u>길이란?</u>:** 동시에 발생한 두 사건의 거리 ➔ $L' = \Delta x' = x'_2 - x'_1$ w/ $\Delta t' = 0$ (막대 양 끝)
- 마찬가지로 '정지' 관측자(ϑ)도 움직이는 막대의 양 끝을 동시에 측정하여 길이 구함: L
- Note: ϑ' 의 두 사건은 ϑ 에게는 동시에 발생한 두 사건이 아님

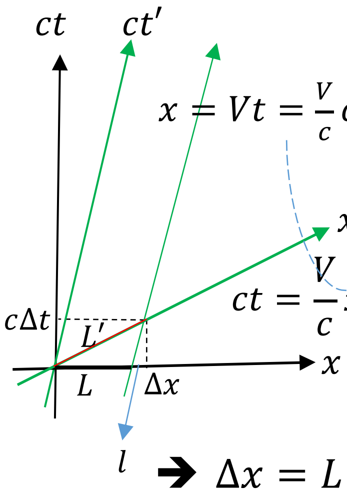


$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -0^2 + L'^2$$

$$-\left(\frac{V}{c}\Delta x\right)^2 + \Delta x^2 = \Delta x^2\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right] = L'^2$$

$$\rightarrow \frac{L^2}{[1-(v/c)^2]^2}[1-(v/c)^2] = L'^2$$

$$\boxed{L = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}\, L'}$$



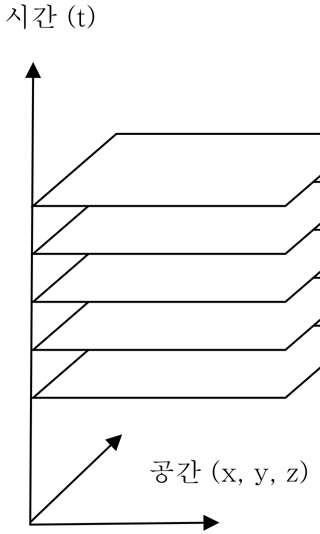
$$x = Vt = \frac{V}{c}ct$$

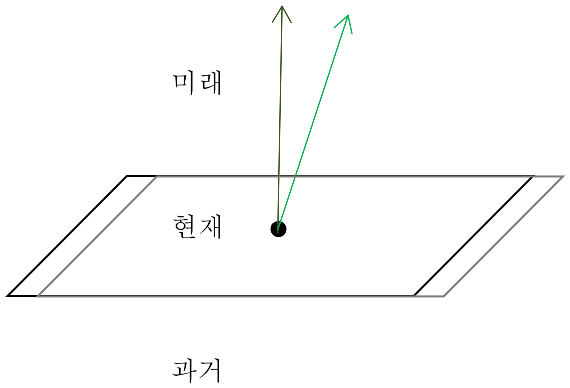
$$ct = \frac{V}{c}x \rightarrow c\Delta t = \frac{V}{c}\Delta x$$

➔ $\Delta x = L + l = L + \frac{V}{c}c\Delta t = L + \left(\frac{V}{c}\right)^2\Delta x$ ➔ $\Delta x = L/\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]$

- **뉴튼적 시공간의 인과구조**

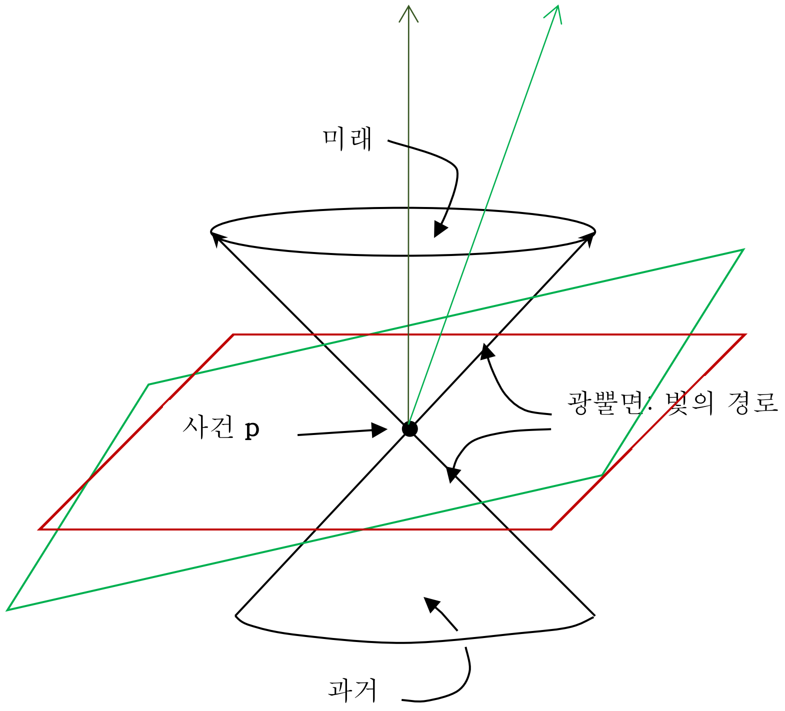
  (Newtonian ST):



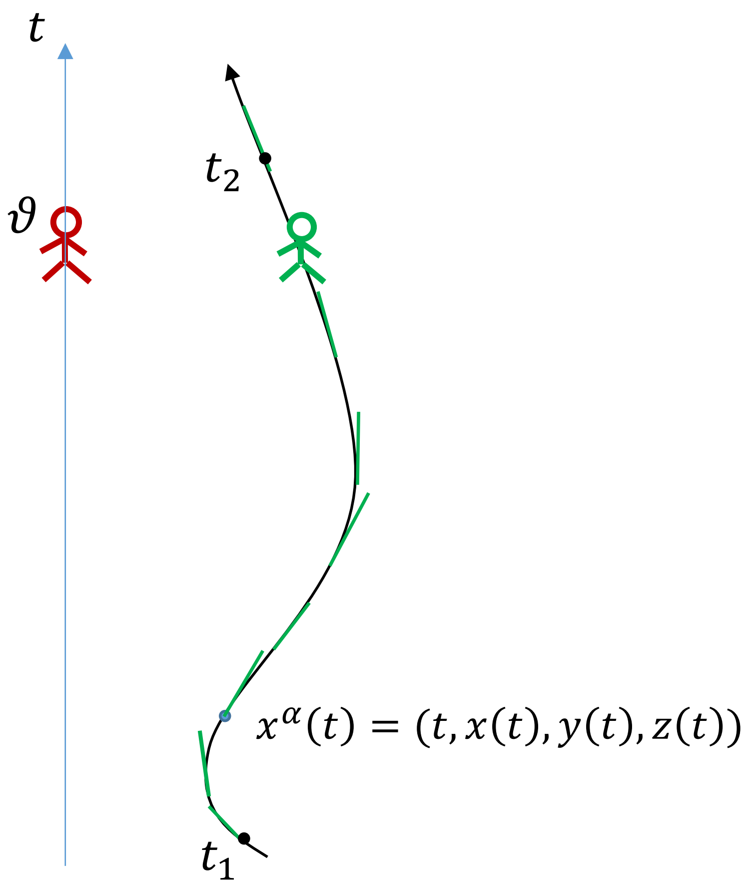


- **특수상대론적 시공간의 인과구조**

  (Special relativity):



- **질문:** 두 사람의 나이는?

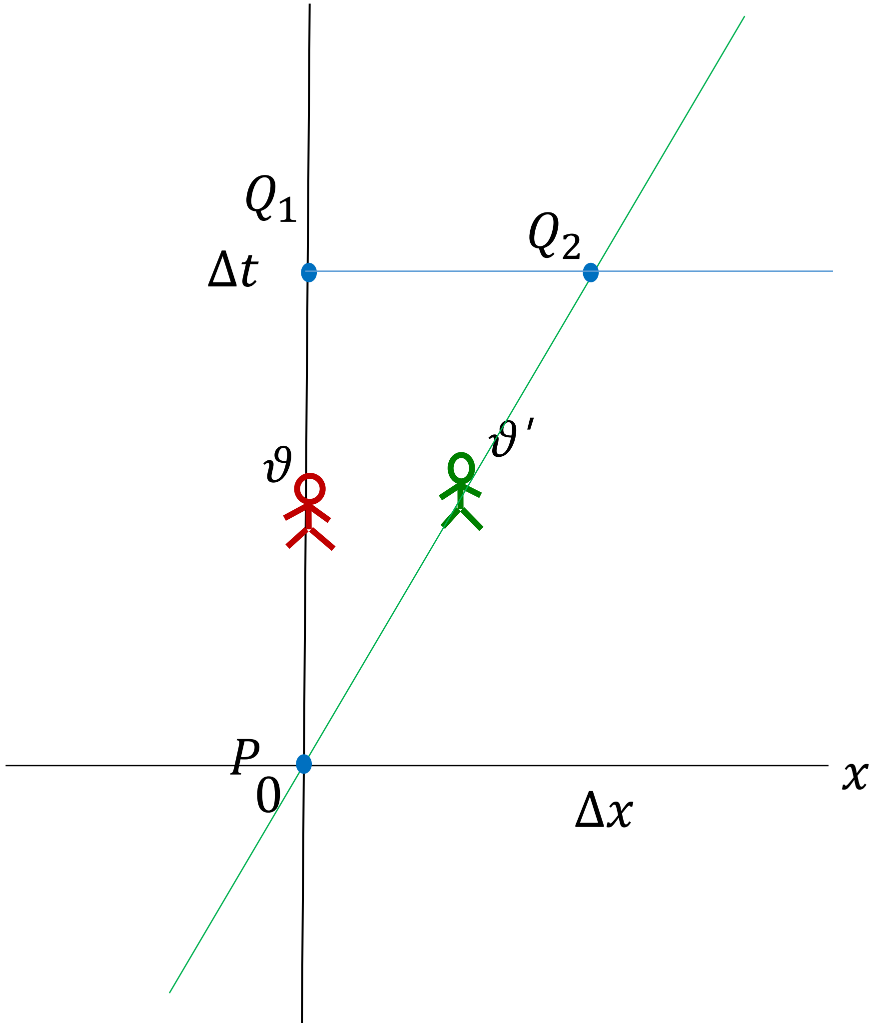


$\tau_\vartheta, \tau_{\vartheta'} = ?$

➔ “고유 시간 "

- **고유 시간(Proper time)의 계산:**

(시간 지연: $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\Delta t'$)



- ϑ 의 경로에 대한 고유 시간: $\tau_{\vartheta} = \Delta t$
- ϑ' 의 경로에 대한 고유 시간:

$$\tau_{\vartheta'} = \Delta t' = \sqrt{1-(v/c)^2}\,\Delta t \quad (< \tau_{\vartheta})$$

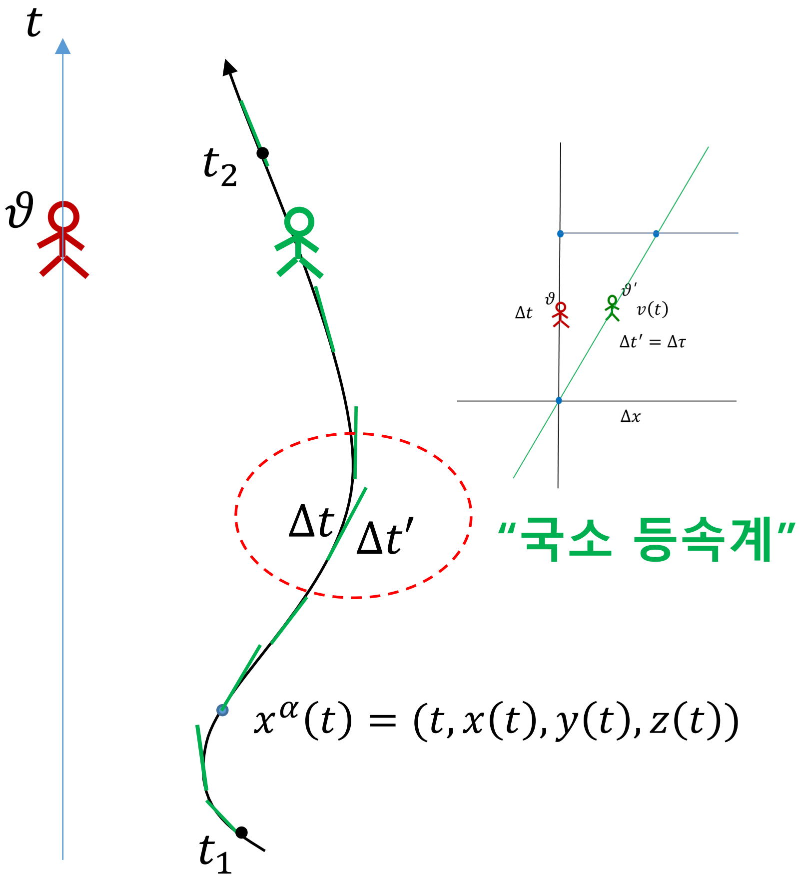
- Note: $\tau_{\vartheta'} = \Delta\tau = \sqrt{1-(v/c)^2}\,\Delta t = \sqrt{c^2 - v^2}\,\frac{\Delta t}{c}$

$$= \sqrt{c^2 - (\Delta x/\Delta t)^2}\,\frac{\Delta t}{c} = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2]}\,\frac{1}{c}$$

$$= \sqrt{-\Delta s^2}\,\frac{1}{c}$$

➔ $\boxed{\Delta\tau = \sqrt{-\Delta s^2}\,\frac{1}{c} \xrightarrow{\Delta t \to 0} d\tau = \sqrt{-ds^2}/c}$

- **일반적인 시간적 경로:** 경로 상 어느 지점에서도 $ds^2 < 0$



$$\Delta\tau_i = \Delta t_i' = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s_i^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta\tau\to 0}\left(\textstyle\sum_i \Delta\tau_i\right) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\left(\frac{1}{c}\textstyle\sum_i \sqrt{-\Delta s_i^2}\right)$$

$$\rightarrow \quad \tau = \int d\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{-ds^2}$$

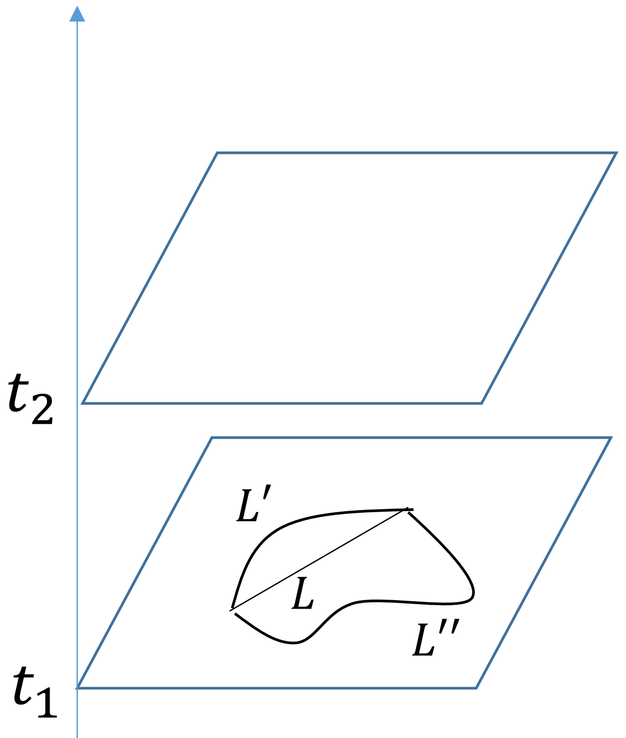
$$= \frac{1}{c}\int\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

$$= \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{c^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2}\,dt$$

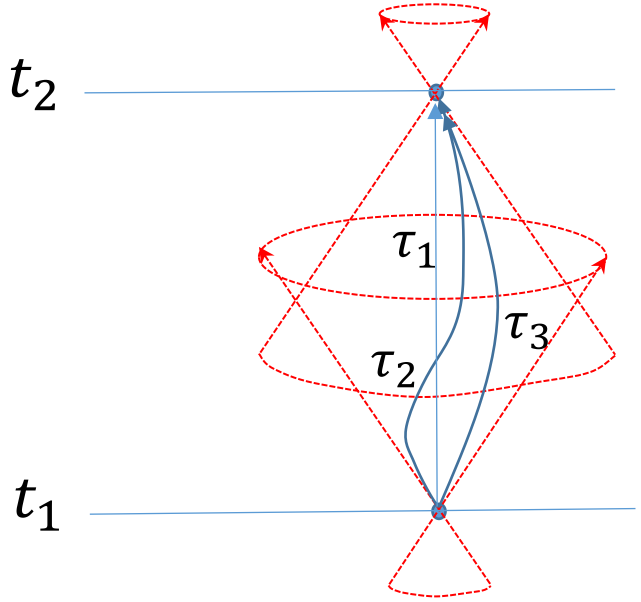
$$= \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{c^2 - v(t)^2}\,dt$$

여기서 $\dot{x}^\alpha(t) = \frac{dx^\alpha}{dt}$.

- ds^2 은 관측자에 대해 불변(스칼라량)이어서 어느 관측자가 측정해도 동일



고유 길이: $L < L' < L''$



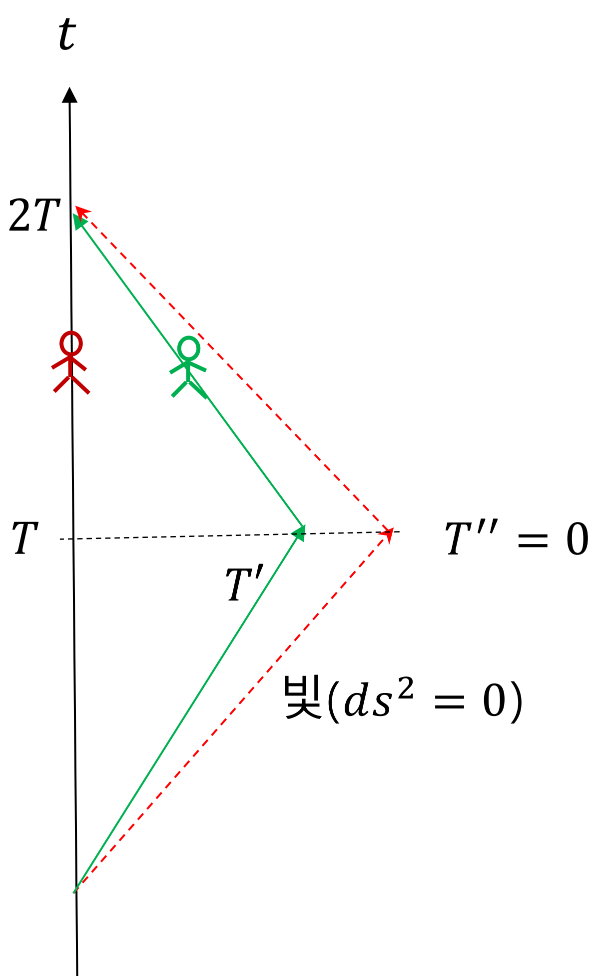
- 두 사건을 잇는 경로에 따라 시간 흐름 달라짐:

$$\tau_1 = t_2 - t_1 \neq \tau_2 \neq \tau_3$$

- 뉴튼의 절대시공간에서는 경로에 무관:

$$\tau_1 = t_2 - t_1 = \tau_2 = \tau_3$$

- “쌍둥이 역설”:



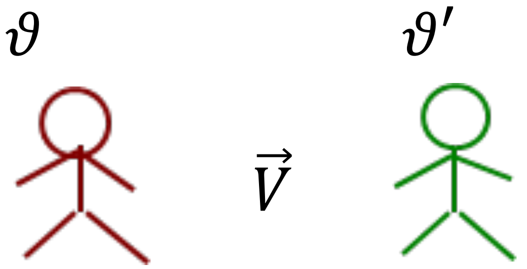
$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{(c\,dt)^2 - dx^2}$$

$\rightarrow$ 0 (빛의 경로)

$$2T > 2T' > 2T'' = 0$$

상대성 원리와 특수상대론적 운동 역학

✓ 상대성 원리



"물리법칙은 모든 관성계에서 동일"

- <u>절대 시공간</u>: 갈릴레오 변환에 대해 물리법칙이 같은 형태

$$t' = t$$
$$x' = x - Vt$$

➔

- <u>특수상대론적 시공간</u>: 로렌츠 변환에 대해 동일한 형태

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(t - \frac{V}{c}\frac{x}{c}\right)$$
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(x - \frac{V}{c}ct\right)$$

- **뉴튼 역학:** $m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$

  - 갈릴레오 변환에 대해 동형:

    ➔ $m\vec{a}' = \vec{F}'$

    $t' = t$

    $x' = x - Vt$

    ➔ $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt'}\frac{d(x'+Vt')}{dt'} = \frac{d^2x'}{dt'^2} + 0 = a'_x$

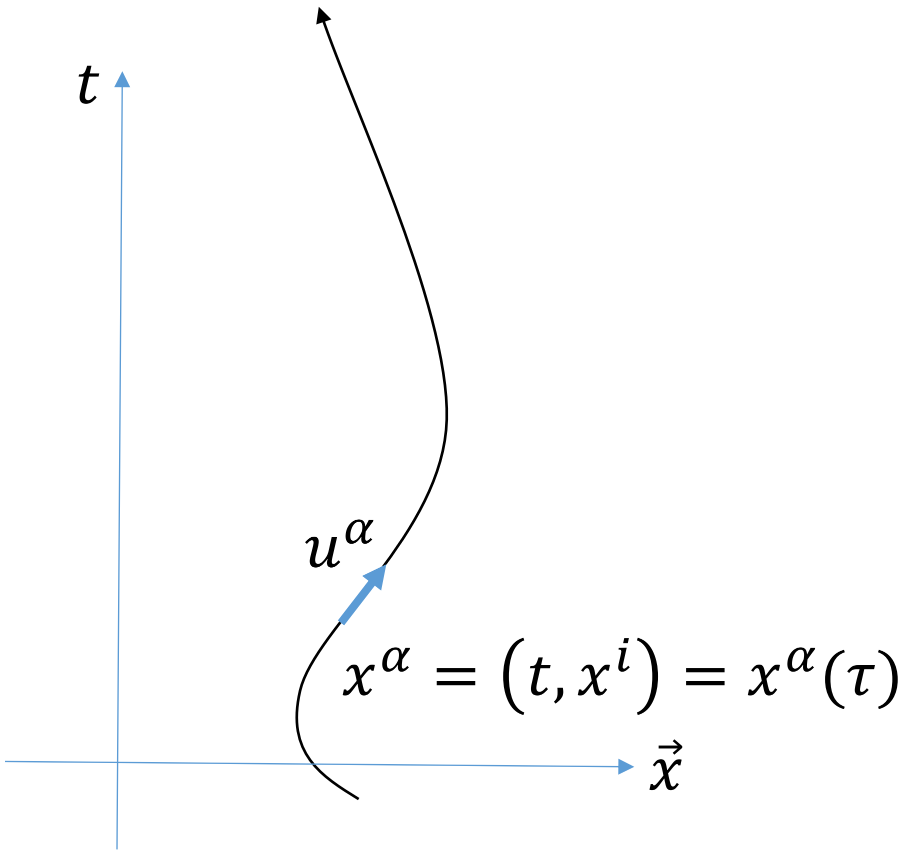
  - 로렌츠 변환에 대해서는 같은 형태가 아님

    - $ma^i = F^i, i = 1,2,3$ ➔ "시간" 성분이 없음.

    - $t' = \gamma(t - Vx) \;\; \rightarrow t = \gamma(t' + Vx')$
      $x' = \gamma\,(x - Vt) \;\; \rightarrow x = \gamma\,(x' + Vt')$

      ➔ $a_x = \frac{d}{d(\gamma(t'+Vx'))}\frac{d(\gamma(x'+Vt'))}{d(\gamma(t'+Vx'))} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{d(t'+Vx')}\frac{d(x'+Vt')}{d(t'+Vx')} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{d^2x'}{dt'^2} + \cdots\right) = \frac{1}{\gamma}(a'_x + \cdots)$

✓ 특수상대론적 운동 역학



- 시공간적 경로에 대해 4차원적 속도의 정의:
  - Four-velocity: $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau})$
  - Three-velocity: $\vec{V} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$ $(V^i = \frac{dx^i}{dt})$
- Note: $u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \equiv \gamma,\ u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx^i}{dt} = \gamma V^i$

  ➔ $u^\alpha = (\gamma, \gamma\vec{V}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{\vec{V}}{\sqrt{1-V^2}}\right)$: 모두 $\vec{V}$ 에 의해 결정됨

  ➔ $u \cdot u = \eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}{(d\tau)^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{(-ds^2)} = -1$
- Four-momentum: $p^\alpha \equiv mu^\alpha = \left(\frac{m}{\sqrt{1-V^2}}, \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-V^2}}\right) = (E, \vec{p})$

➔ $p \cdot p = m^2 u \cdot u = -m^2 = -E^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}$, or $E^2 = (mc^2)^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}$

- Four-acceleration: $a^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$ (Note: $a \cdot u = 0$)

• 특수상대론적 운동 방정식:

$$\boxed{ma^\mu = f^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)}$$

여기서 Four-force:

$$f^\alpha = (f^0, \vec{f}) \equiv (\gamma \vec{F} \cdot \vec{V}, \gamma \vec{F})$$

$$f \cdot u = 0 = -f^0 u^0 + \vec{f} \cdot \vec{u}$$
$$= -f^0 \gamma + (\gamma \vec{F}) \cdot (\gamma \vec{V})$$
$$\rightarrow f^0 = \gamma \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Note:

- 임의의 관성계에서 같은 형태: $\Lambda^{\alpha'}_{\mu}(ma^\mu = f^\mu) \rightarrow ma'^\alpha = f'^\alpha$ w/ $\Lambda^{\alpha'}_{\mu} \equiv \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}$

- $ma^\mu = m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \rightarrow \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{dE}{d\tau} = f^0 \rightarrow \frac{dt}{d\tau}\frac{dE}{dt} = \gamma\frac{dE}{dt} = \gamma\vec{F} \cdot \vec{V}$

  ➔ $\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}}$: "단위 시간당 해준 일" ➔ $p^0 = E$ 를 에너지로 해석하는 이유

- $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{f} \rightarrow \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma\vec{F} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right) = \boxed{m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \vec{F}}$

• 특수상대론적 운동에너지 (Relativistic energy):

m

$V = 0$ $\quad$ $\vec{V}\ \left(V^i = \frac{dx^i}{dt}\right)$

운동에너지: KE = 0 ➔ $\frac{1}{2}mV^2$ (뉴튼 역학)

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

$$E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = mc^2\left[1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = mc^2\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\left(\frac{V}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{V}{c}\right)^4+\cdots\right] \quad (V/c \ll 1)$$

$$\rightarrow \quad E = mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{3}{8}mc^2\left(\frac{V}{c}\right)^4 + \cdots$$

- 테일러 전개:
  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots$

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \equiv \tilde{m}c^2}$$

- 빛의 속도로 증가시키려면($V \rightarrow c$) 무한의 에너지 필요!!
- 따라서 물체의 속도는 빛의 속도를 넘지 못한다.

✓ 전자기학의 상대론적 표현

- 고전적 표현:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$$

여기서

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$J^\alpha = (c\rho, \vec{J})$$

- 특수상대론적 표현:

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0,$$

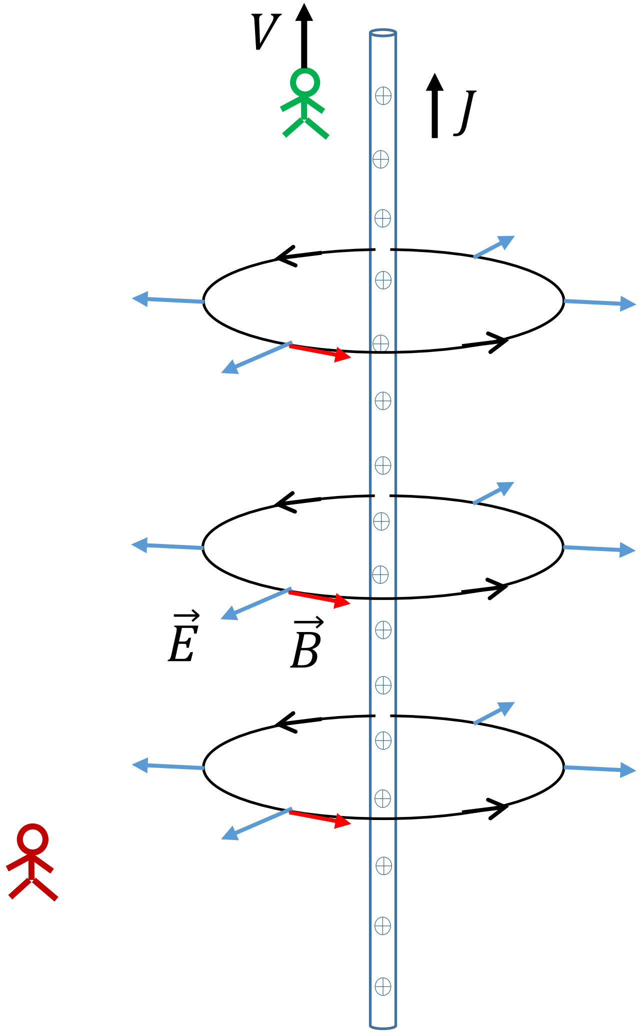
$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta$$

특수상대론적 시공간에서의 텐서 방정식

➔ 상대성 원리를 만족한다는 것을 보장:

$$\boldsymbol{A_{\alpha\beta} = 0 \iff A'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'}\Lambda^{\nu}_{\beta'}A_{\mu\nu} = 0}$$

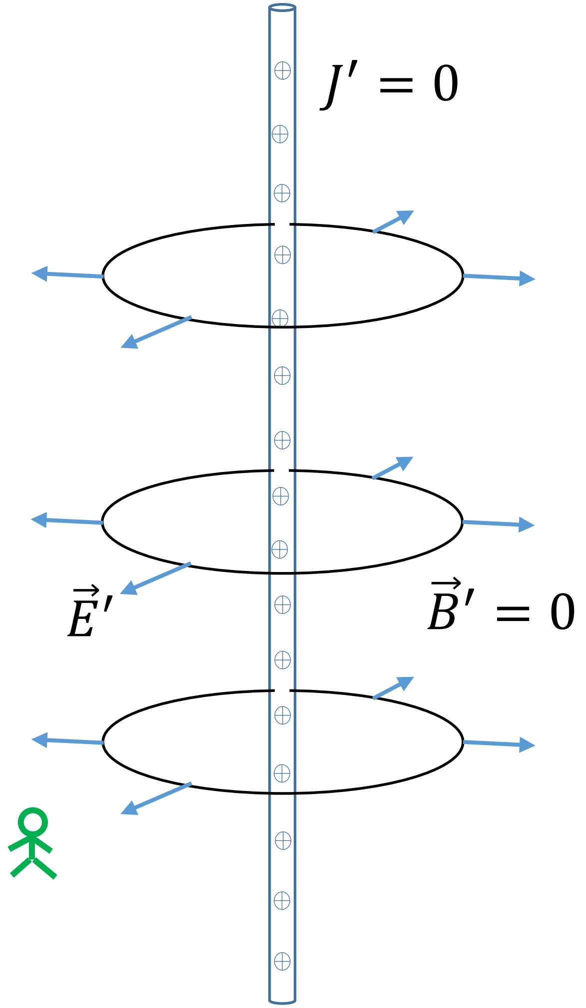
Ex) 전류와 자기장:



$$-B_x = F^{yz} = \Lambda^{y}_{\alpha'}\Lambda^{z}_{\beta'}F^{\alpha'\beta'}$$

$$= \gamma\left(\frac{V}{c}E'_y - \cancelto{0}{B'_x}\right)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{B_x = -\frac{\gamma V}{c}E'_y}$$



✓ 뉴튼 극한: $c \to \infty$

i) 로렌츠 변환 ➔ 갈릴레오 변환

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t - \frac{v}{c}\frac{x}{c}\right)$$
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(x - \frac{v}{c}\, ct\right)$$
$$y' = y,\ z' = z$$

⇩

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$
$$y' = y,\ z' = z$$

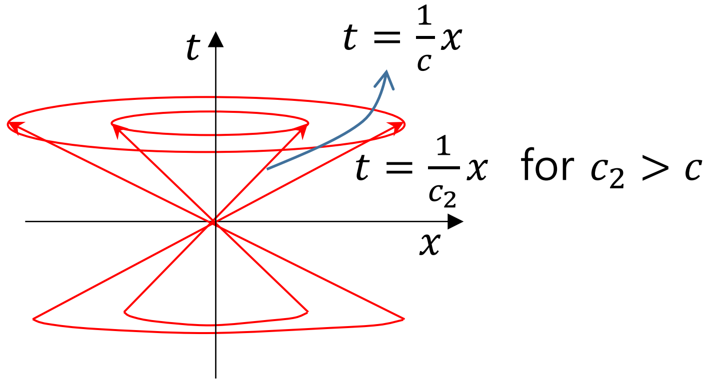
ii) 절대 시공간의 거리 구조

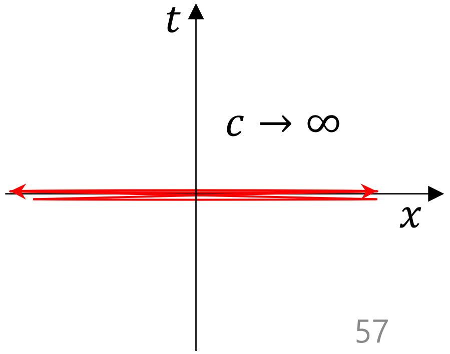
$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta l)^2 \cong -(c\Delta t)^2 = \Delta s'^2 \cong -(c\Delta t')^2$$

➔ $\Delta t = \Delta t'$.

Consequently, we also obtain $\Delta l = \Delta l'$

iii) 인과 구조





✓ Question and Answer:

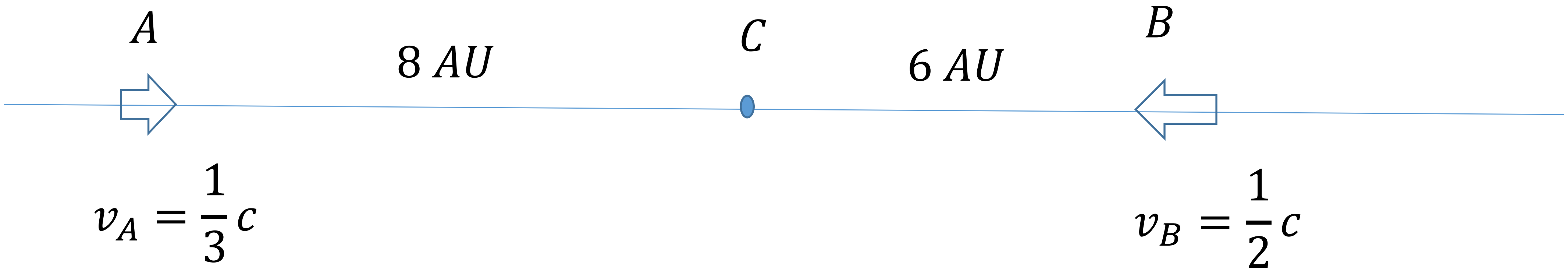
Homework Problems

Prob.1) 본인의 세계선을 간략히 그리시오(탄생부터 현재까지).

Prob.2) Ex3) 로렌츠 변환을 유도하시오.

Prob.3) Ex6) 길이 수축을 유도하시오.

Prob.4) 우주에서 다음과 같이 C 지점에서 1시간(각자의 고유시간) 후 친구를 만나려면 A 출발 후 B는 언제 출발해야 하는가?



Prob.5) Consider the reaction $A \rightarrow B + C$ with particle rest masses m_A, m_B and m_C, respectively.

a) If A is at rest in the lab frame, what is the momentum four-vector ${P_A}^{\mu}$ in the lab frame? Show also that, in this lab frame, particle B has an energy $E_B = ({m_A}^2 + {m_B}^2 - {m_C}^2)/2m_A$.

b) If A decays while moving in the lab frame, find the relation between the angle θ at which B comes off, and the energies of A and B.