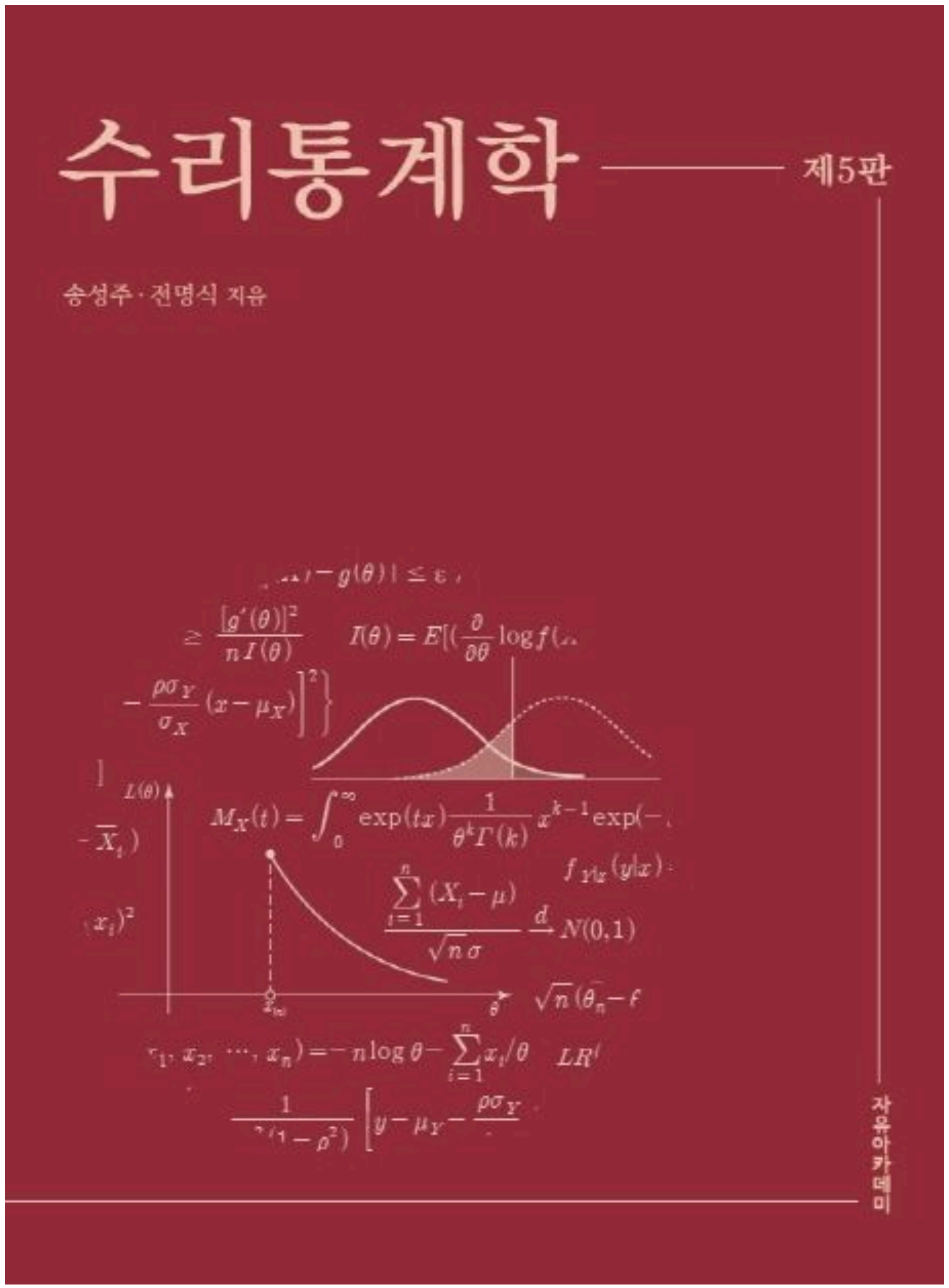
NRGW summer school, 2024.07.29~08.02

중력파 데이터 분석을 위한 수리통계학

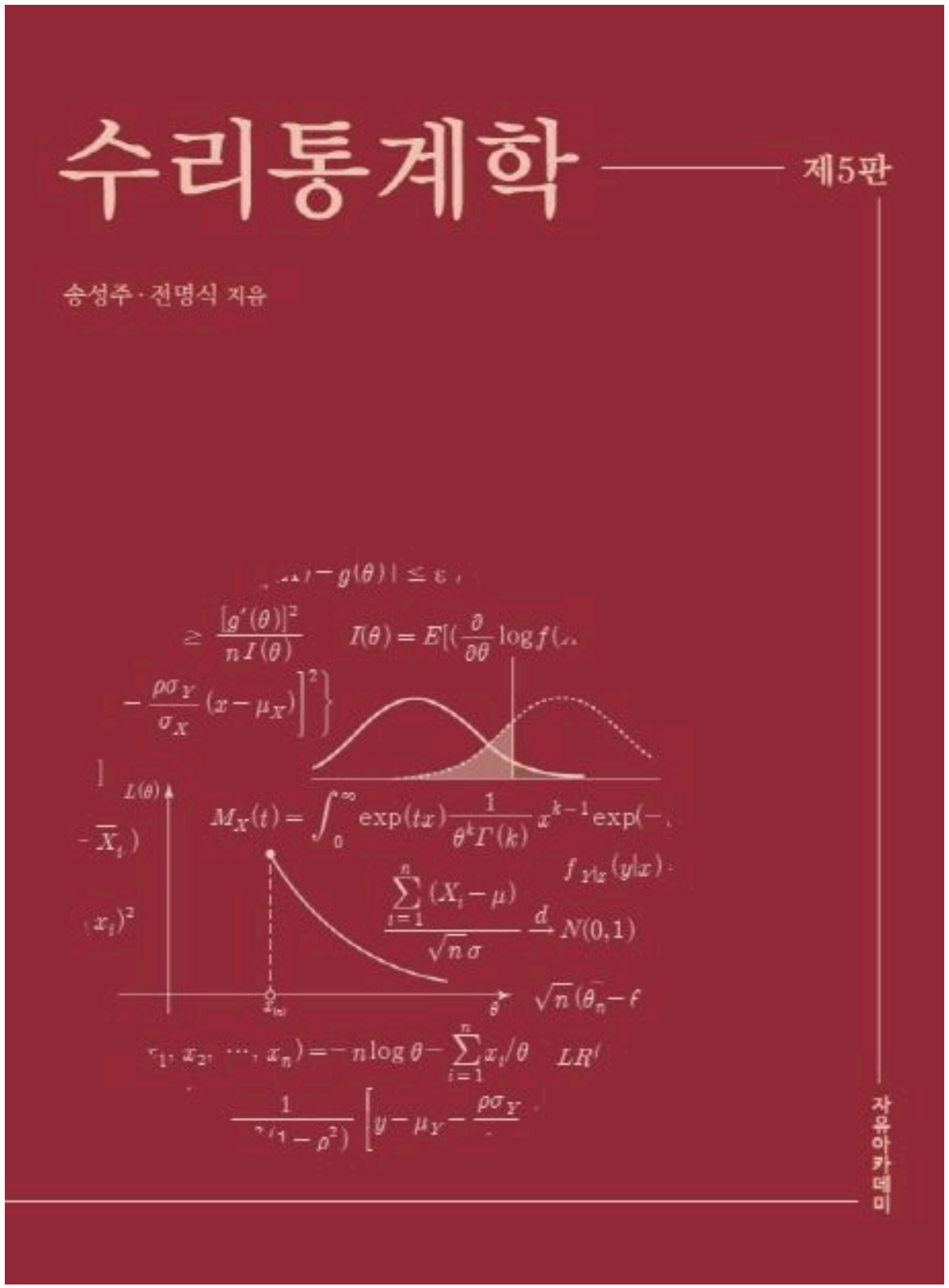
Kim, Young-Min (김영민)
KASI(한국천문연구원)

Email: ymkim@kasi.re.kr
ymkim715@gmail.com

확률과 통계 (Probability & Statistics)

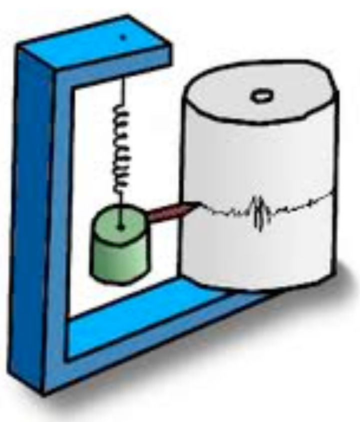


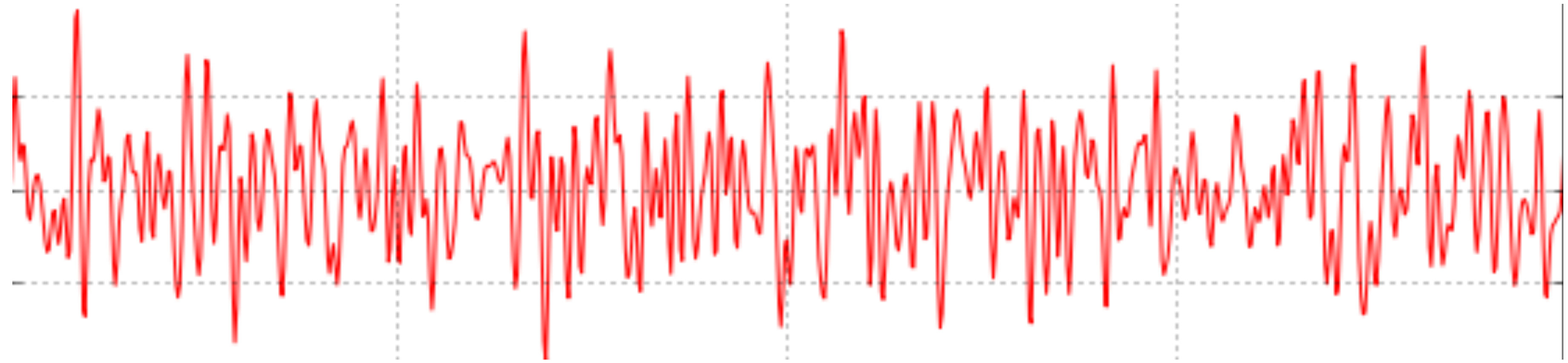
확률과 통계 (Probability & Statistics)



다 공부할 필요가 있나?
다하면 좋지만 개념을 집고
넘어가자!

관측과 실험





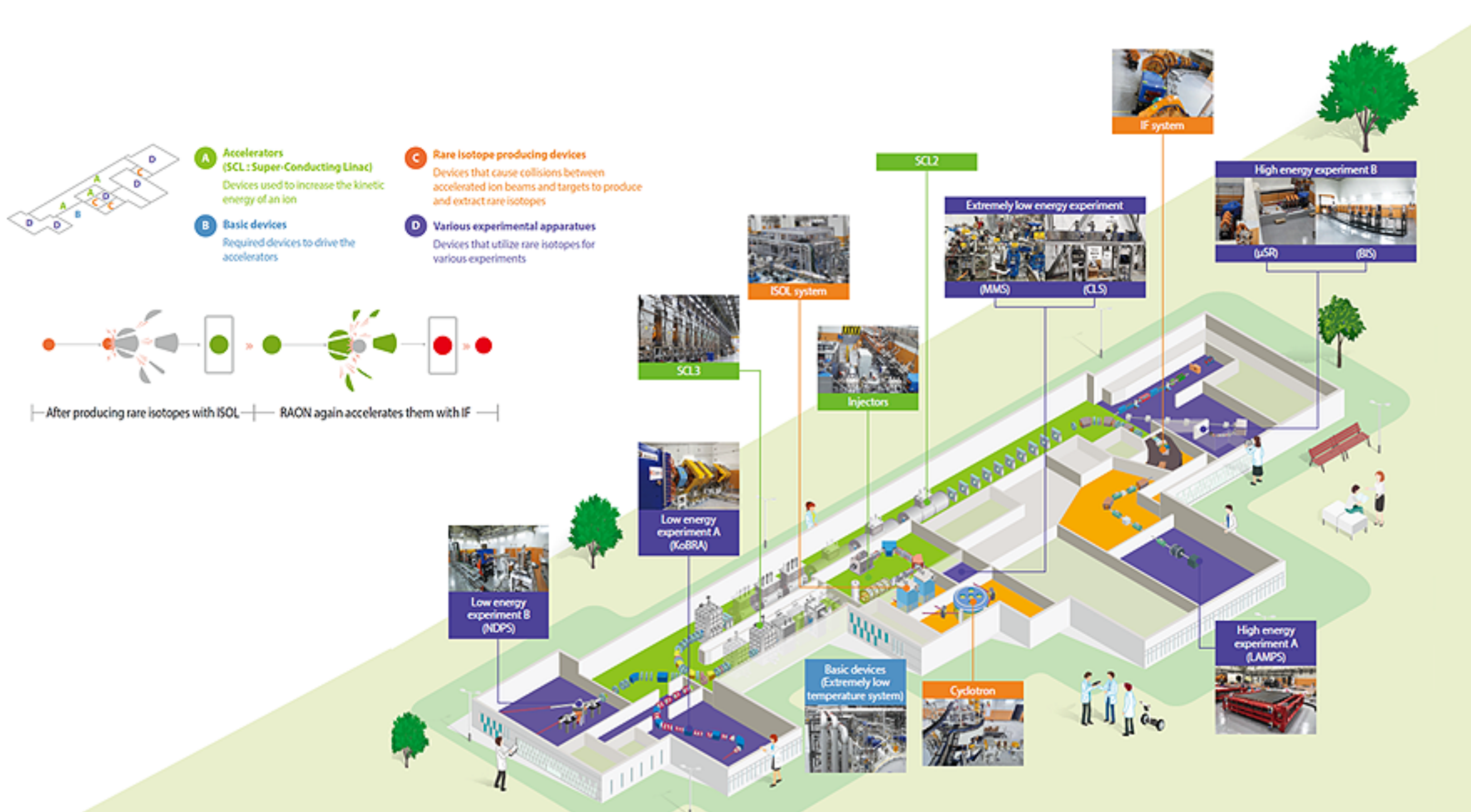
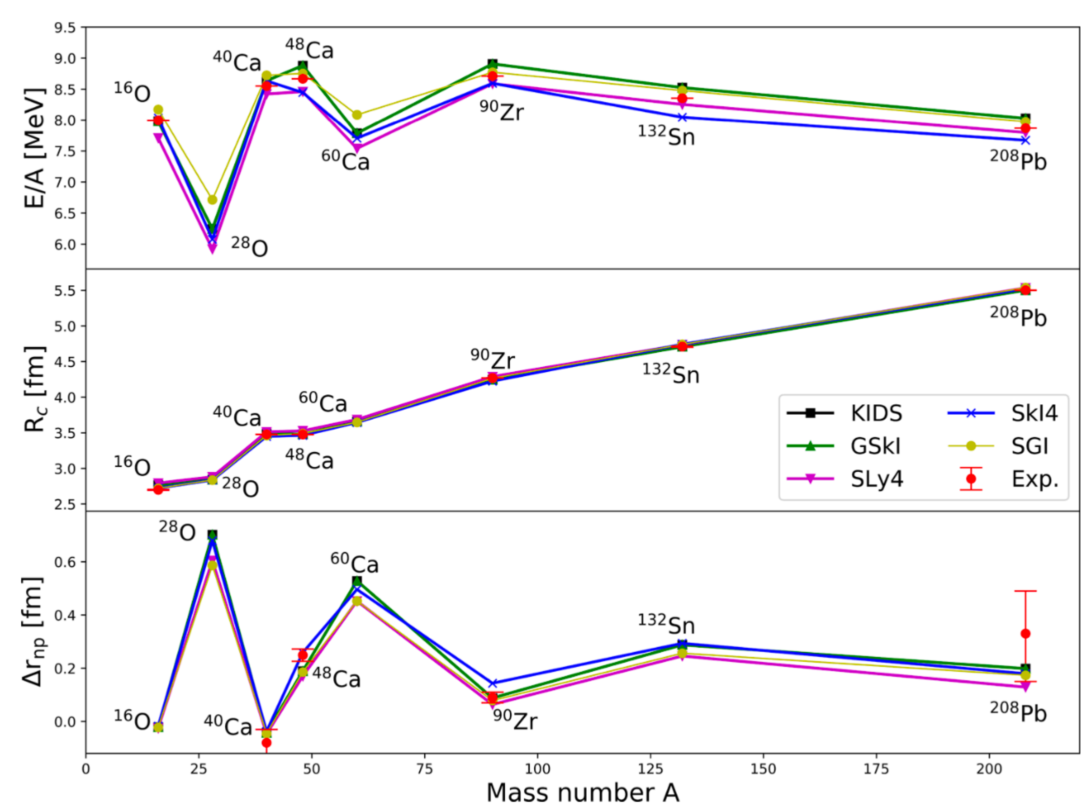


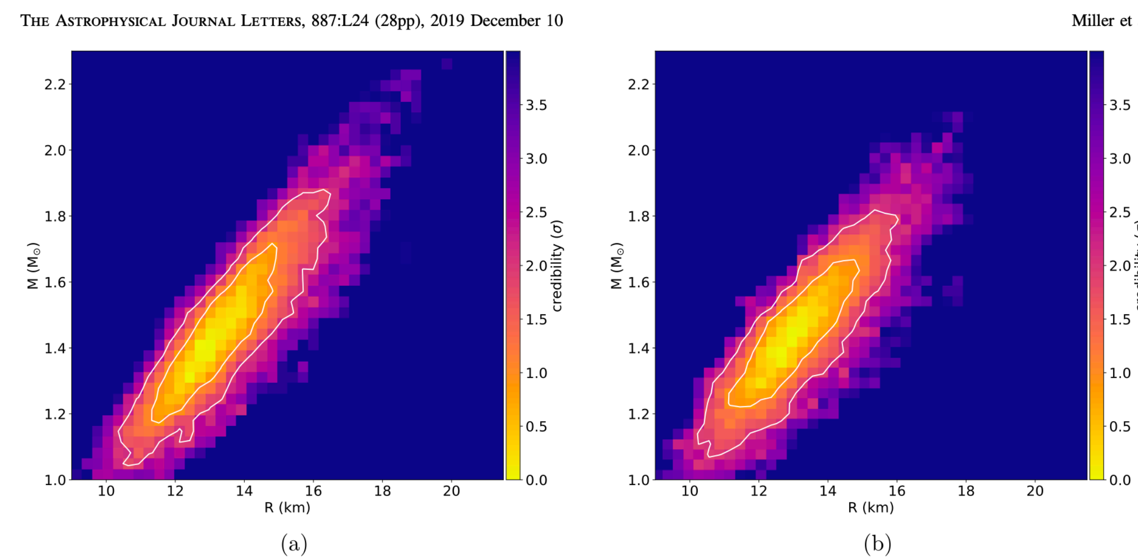
Image credit: CENS/IBS



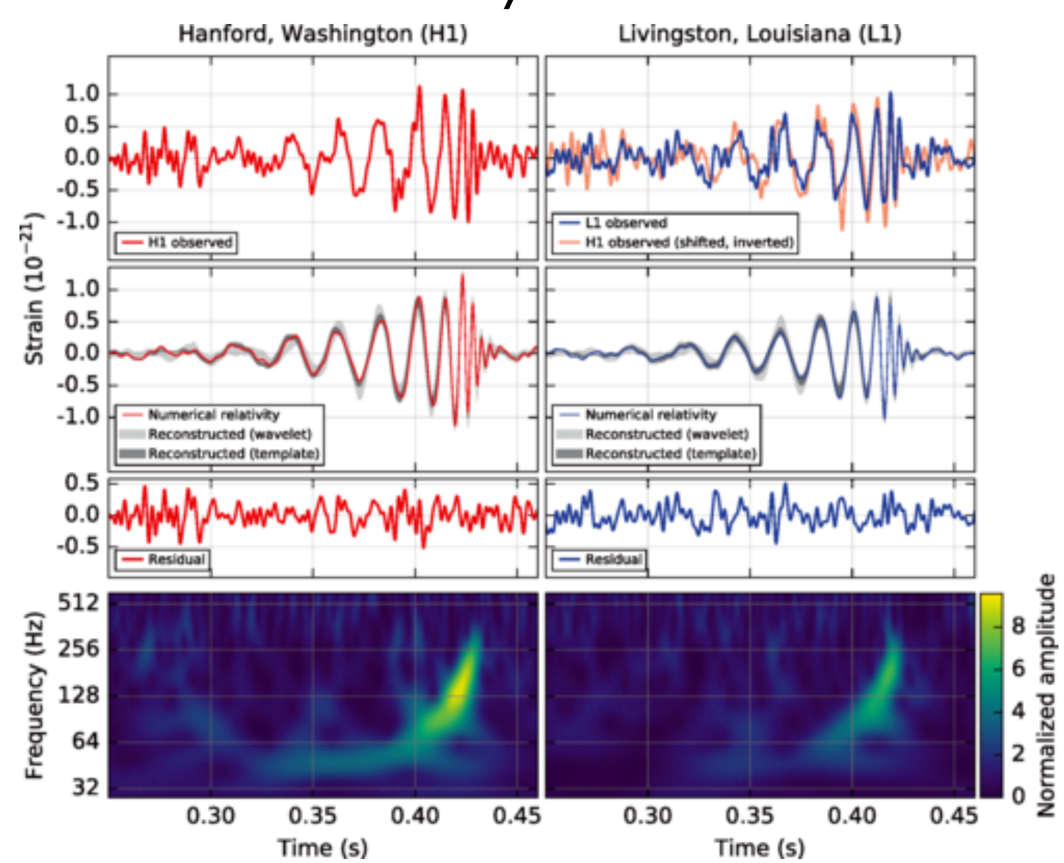
Kim et al. IJMPE (2020)

관측과 실험

Image credit: NASA



PhysRevLett.116.061102



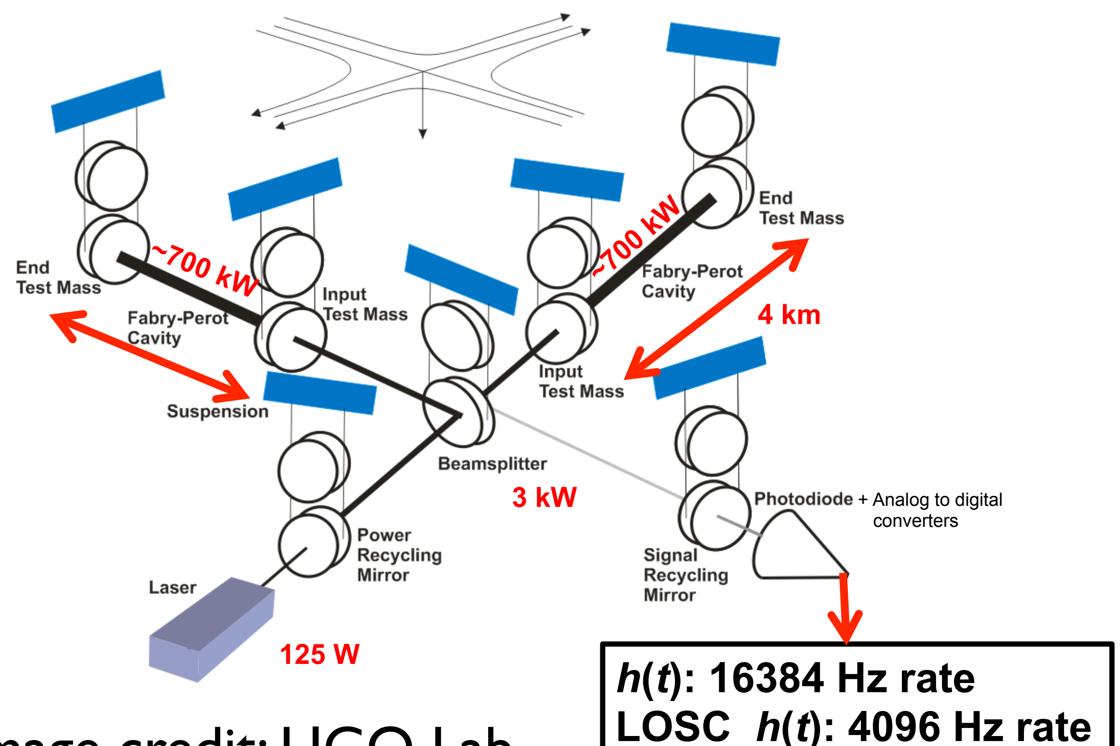


Image credit: LIGO Lab.

관측과 실험 그리고 데이터

데이터 분석 : 관측 또는 실험을 통해 얻어진 데이터를 통계적 방법론으로 해석.
측정값 또는 관측값에 대응하는 변수는 확률변수로 다룸

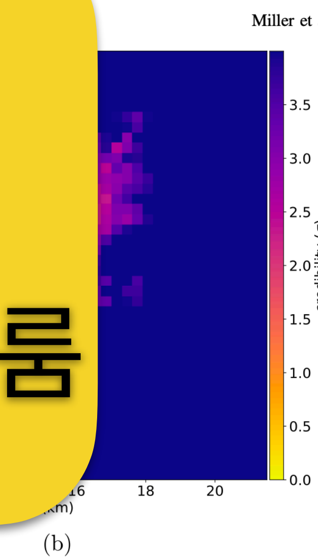


Image credit: NASA

PhysRevLett.116.061102

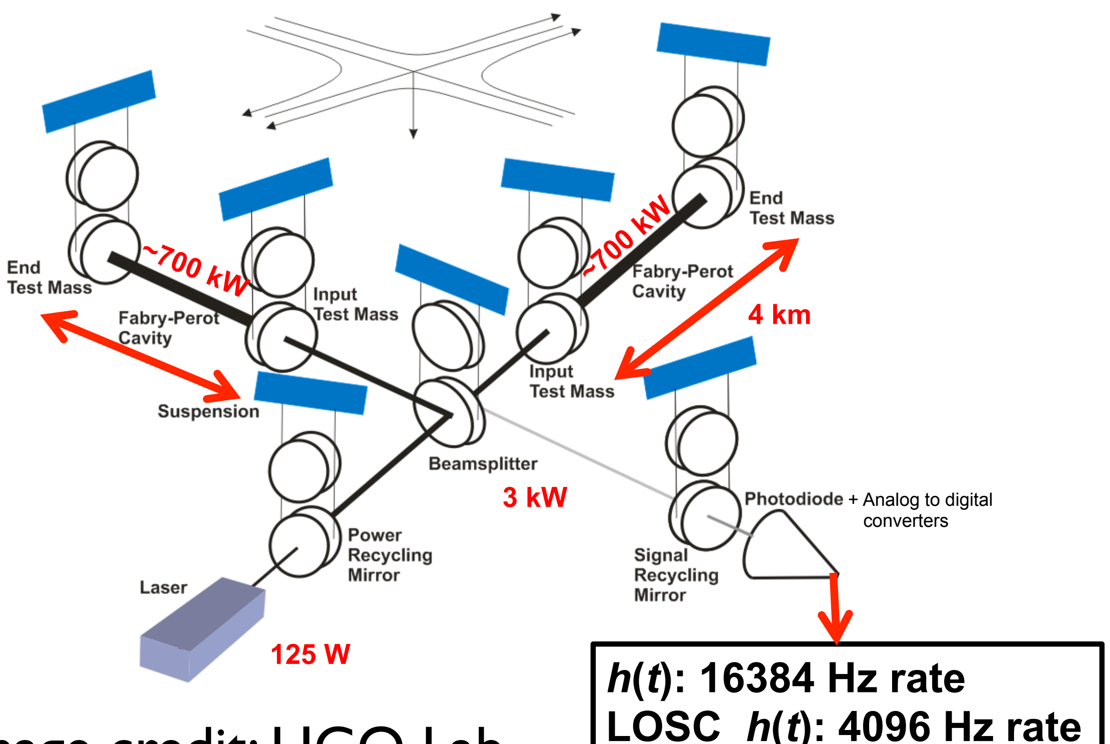
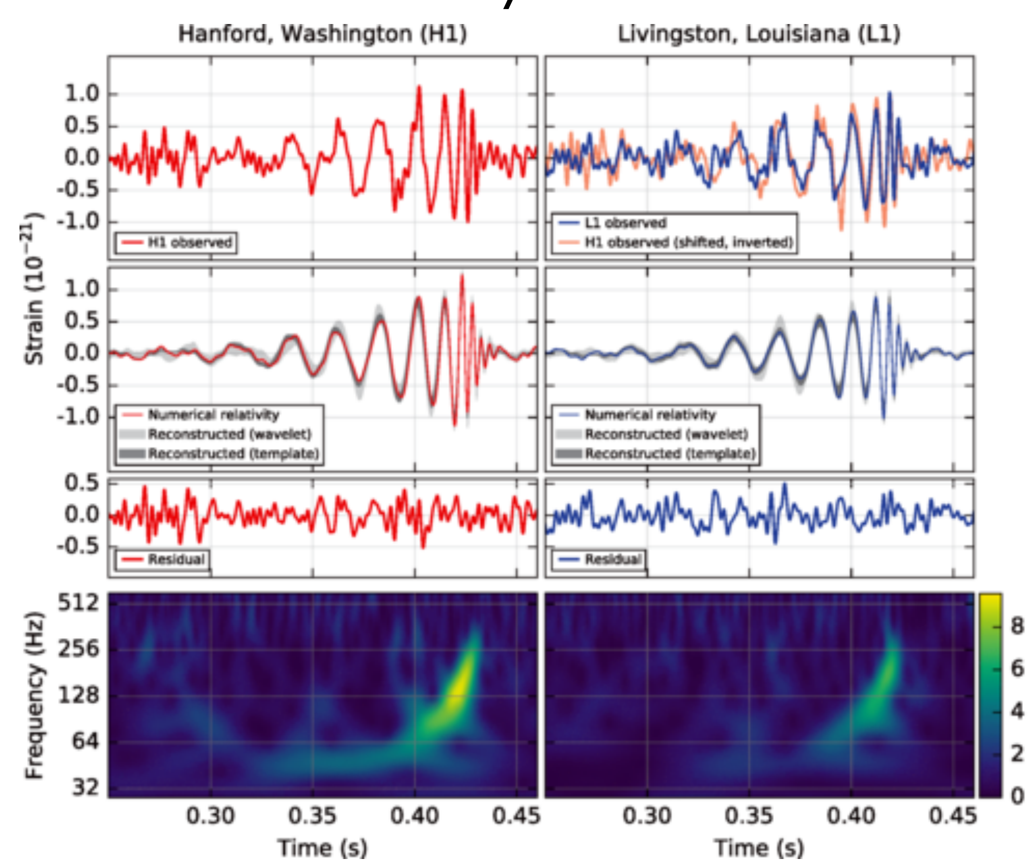


Image credit: LIGO Lab.



확률과 통계 (Probability & Statistics)

통계학이란 무엇인가?

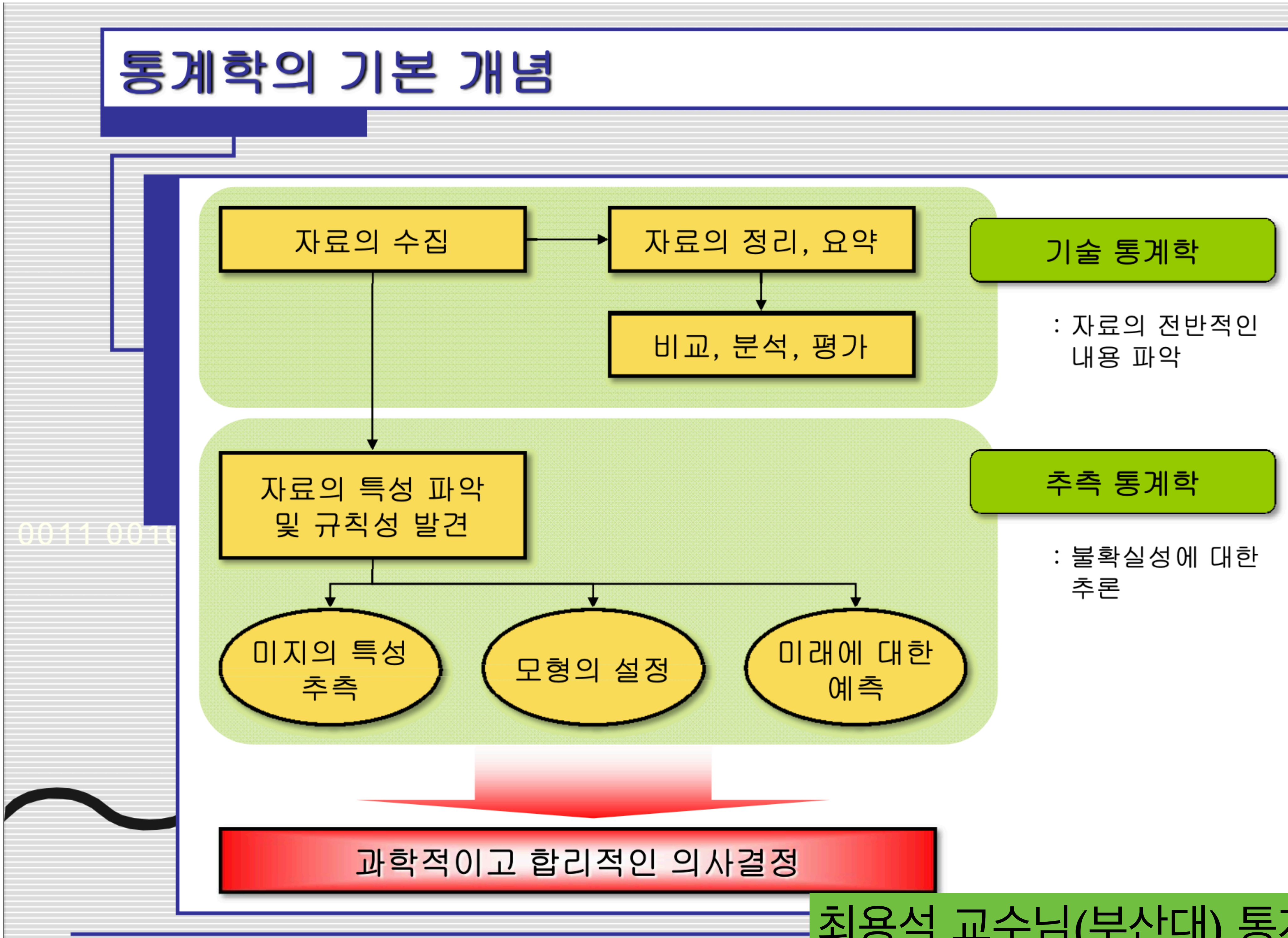
- 통계학(Statistics)이란?
  - 불확실성이 개재된 상황에서
    일정한 목적을 갖고 조사 또는 연구를 할 때
    - 자료를 효율적으로 수집하는 방법
    - 수집된 자료를 명료하게 정리하는 방법
    - 수집된 자료를 바탕으로 현재 상태를 파악하는 방법
    - 미래를 적절히 예측함으로써
      과학적이고 합리적인 의사결정을 내릴 수 있는 방법

  을 연구하고 개발하는 학문

0011 0010

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서 (아래 링크에서 통계학개론01~11 자료 확인)
https://yschoi.pusan.ac.kr/sites/yschoi/download/statistics/통계학개론01.pdf

확률과 통계 (Probability & Statistics)



최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

수치에 의한 자료의 요약 – 중심위치의 척도

- 대표값 (measure of centrality)
  - 표본평균 (sample mean)
    - 대표값 중에서 실제적으로 가장 많이 사용됨
    - 통계적 추론 과정에서 활용
    - 일반적으로 산술평균(arithmetic mean)을 이용하여 계산
      - n개의 관측값을 각각 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이라 하면

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

    - 산술평균은 예외적으로 크거나 작은 관측값에 영향을 많이 받음
      ⇒ 절사평균(trimmed mean)을 이용

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 중앙값 (median)
  - 관측값들을 크기 순으로 정렬하였을 때 중앙에 위치하는 값
    - 관측값의 개수(n)가 홀수일 때

$\frac{(n+1)}{2}$ 번째 관측값

    - 관측값의 개수(n)가 짝수일 때

$\frac{n}{2}$ 번째 관측값과 $\frac{n}{2}+1$ 번째 관측값의 평균

  - 중앙값은 예외적으로 크거나 작은 관측값에 영향을 받지 않음

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 최빈값 (mode)
  - **전체 관측값들 중에서 가장 빈도가 많은 관측값**
  - 자료의 범위가 비교적 작고 서로 겹치는 관측값들이 많은 경우 유용
  - 주로 이산형 자료 및 범주형 자료의 대표값으로 활용
  - 두 개 이상의 최빈값이 존재할 경우 대표값으로의 의미 약화됨
- 예 – [통계학과 신입생의 키]
  - 전체 학생을 대상으로 한 경우
    - 159.5cm 이상 164.5cm 미만인 학생수 14명
    - 169.5cm 이상 174.5cm 미만인 학생수 12명
  - 최빈값으로는 자료의 중심을 단언하기 힘듦

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

수치에 의한 자료의 요약 – 퍼진 정도의 척도

- 산포도 (measure of dispersion)
  - 분산 (variance)
    - 관측값들이 표본평균을 중심으로 흩어진 정도
    - 편차(deviation)
      - n개의 관측값을 각각 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$이라 하고, 이들의 평균을 $\bar{x}$라 하면

$$\text{편차} = (x_i - \bar{x}) \qquad i = 1,\ \cdots,\ n$$

      - 각각의 관측값에 대한 편차의 합은 항상 0이 됨.
    - 표본분산
      - 편차의 제곱합

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

      - 관측값 측정단위의 제곱

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 표준편차 (standard deviation, S.D.)
  - 관측값들이 표본평균을 중심으로 흩어진 정도
  - 표본표준편차
    - 표본분산의 양의 제곱근

$$s = \sqrt{s^2} = \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{1/2}$$

    - 관측값의 측정단위와 일치
- 변동계수(coefficient of variation, CV)
  - 표본변동계수
    - 표본평균을 중심으로 상대적인 산포 비율(%)
    - 측정 단위가 다르거나 중심위치가 매우 다른 경우 비교 가능

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100 \ (\%)$$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 확률의 정의
  - 확률 (probability)
    - 각각의 근원 사상들이 발생할 가능성 같다고 가정
    - 사상 A의 확률 $P(A)$는

$$P(A) = \frac{\text{사상}\, A\, \text{에 속하는 근원사상의 수}}{\text{표본공간의 모든 근원사상의 수}}$$

  - 확률의 성질
    - 모든 사상 $A \subset \Omega$에 대하여 $0 \le P(A) \le 1$
    - $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$
    - $P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 조건부확률과 확률법칙
  - 조건부확률(conditional probability)
    - 사상 B에 관한 정보가 주어졌을 때 사상 A가 발생할 확률

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad (\text{단, } P(B)>0)$$

  - 곱사상의 확률법칙
    - 표본공간에서 정의되는 두 개의 사상 A 와 B에 대해 $P(A)>0,\ P(B)>0$ 라면,
    - $$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(B)P(A\mid B) \\ &= P(A)P(B\mid A) \end{aligned}$$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

확률변수

- 확률변수의 정의
  - 확률변수 (random variable)
    - 각각의 근원사상들에 대하여 하나의 실수값을 대응시켜주는 함수
      - 확률변수 : $X, \ Y, \ Z$
      - 확률변수가 가지는 값 : $x_1, \ x_2, \ \cdots, \ y_1, \ y_2, \ \cdots, \ z_1, \ z_2, \ \cdots$
  - 확률변수의 종류
    - 이산확률변수
      - 확률변수가 취할 수 있는 가능한 값들이 셀 수 있는 값
      - 확률변수가 취하는 특정 값에 대한 확률을 계산 가능
      - 예 – 한 자동차 정비공장에서 하루 동안 정비되는 자동차 수
        – 20문제의 퀴즈 중 학생들이 올바르게 답한 문제의 수
    - 연속확률변수
      - 확률변수가 취할 수 있는 가능한 값들이 구간 내의 연속적인 값
      - 확률변수가 취하는 특정 구간에
      - 예 – 과일 음료 안에 포함된 과일
        – 다이어트 프로그램에 따른 몸무게의 감소량

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

이산확률변수와 확률분포

- 확률분포의 정의
  - 확률분포 (probability distribution)
    - 확률변수가 갖는 값들과 그에 대응하는 확률값을 나타내는 것
  - 확률질량함수 (probability mass function, p.m.f.)
    - 이산확률변수 X가 취할 수 있는 값 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ 에 대하여 확률 $P(X = x_1),\ P(X = x_2),\ P(X = x_3),\ \cdots$ 를 대응시켜주는 함수

$$\boxed{f(x_i) = P(X = x_i)}$$

    - 확률질량함수의 성질
      - 모든 x_i 값에 대해 $0 \le f(x_i) \le 1$
      - $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 확률변수의 분산과 표준편차
  - 확률변수 X의 분산

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X-E[X]]^2 \\
&= E\left[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\
&= E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \\
&= E\left[X^2\right] - \mu^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

  - 확률변수 X의 표준편차

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\sigma^2}$$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

베르누이 시행과 이항분포

- 베르누이 시행 (Bernoulli trial)
  - 베르누이 시행의 조건
    - 각 시행은 성공(S : success), 실패(F : failure) 두 결과만 가짐
    - 각 시행에서
      성공할 확률은 $P(S) = p$
      실패할 확률은 $P(F) = 1 - p$ 로 일정
    - 각 시행은 서로 독립으로
      각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 미치지 않음
  - 예 – [베르누이 시행 여부 판정]
    - 공정한 주사위를 던지고, 나온 눈을 기록
    - 공정한 주사위를 던지고, 나온 눈이 5인가를 기록
    - 두 개의 공정한 주사위를 던지고, 나온 눈의 합이 7인가를 기록
    - 납을 박은 부정 주사위를 던지고, 나온 눈이 5인가를 기록

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 이항분포 (binomial distribution)
  - 이항분포의 정의
    - 각 시행에서 성공할 확률이 p인 베르누이 시행을
      n번 반복할 때에 일어나는 성공의 횟수에 관한 확률분포

      - n : 베르누이 시행의 반복 횟수
      - p : 각 시행에서 성공할 확률
      - X : n번 시행 중 성공의 횟수
      - $P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
      - 확률변수 X는 이항분포를 따름

      $$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

연속확률 변수와 확률분포

- 연속확률 변수
  - 연속확률 변수
    - 확률변수가 취할 수 있는 가능한 값들이 구간 내의 연속적인 값
    - 확률변수가 취하는 특정 구간에 대한 확률만 계산 가능
  - 확률밀도함수 (probability density function, p.d.f.)
    - 연속확률변수 X 가 취할 수 있는 구간에 대해 확률을 대응시켜주는 함수
    - 확률밀도함수의 성질
      - 모든 x 값에 대해 $f(x) \geq 0$
      - $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$
      - $P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

연속형 확률분포

- 정규분포 (Normal Distribution)
  - 정규분포의 정의
    - 확률변수 X가 다음과 같은 확률밀도함수 $f(x)$를 가질 때, 확률변수 X는 평균 μ, 분산 σ^2인 정규분포를 따른다고 함
    - $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$
    - $$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$
  - 정규분포가 중요시 되는 이유
    - 자연현상이나 사회현상에서 측정값들의 분포는 정규분포와 유사
    - 정규분포를 따르지 않는 분포도 약간의 변환을 통해 정규분포와 유사한 형태를 만들 수 있음
    - 표본의 크기가 큰 경우 표본평균은 근사적으로 정규분포를 따름

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

표본평균의 분포와 중심극한정리

- 표본평균의 분포
  - 표본평균의 평균과 분산
    - $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$을 평균 μ , 분산 σ^2 인 모집단으로부터의 크기 n 인 확률표본이라 할 때
      - 표본평균의 평균은 모평균과 같다

$$E\left(\bar{X}\right) = \mu$$

      - 표본평균의 분산은 (모분산/ n)과 같다

$$Var\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

    - 모집단이 정규분포를 따르면 표본평균도 정규분포를 따른다
      - 모평균이 μ 이고 모분산이 σ^2인 정규모집단에서 n 개의 표본을 임의로 추출할 때, 그 표본의 평균 $\bar{X}$ 의 분포는 $N\left(\mu,\ \sigma^2/n\right)$ 임

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

- 중심극한정리 (Central Limit Theorem)
  - $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$을
    평균 μ, 분산 σ^2인 임의의 모집단에서 추출한
    크기 n의 확률표본이라 할 때,
    표본의 크기 n이 커짐에 따라 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포는
    근사적으로 정규분포 $N\left(\mu,\ \sigma^2/n\right)$를 따르게 된다

as $n \to \infty$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\ \sigma^2/n\right)$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sqrt{\sigma^2_{\overline{X}}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

통계적 추론

- 통계적 추론 (statistical inference)
  - 통계적 추론의 정의
    - 표본이 갖고 있는 정보를 분석하여
      모수에 관한 결론을 유도하고,
      모수에 대한 가설의 옳고 그름을 판단하는 것
  - 통계적 추론의 분류
    - 추정 (estimation)
      - 미지수인 모수에 대한 추측값을 그 수치화된 정확도와 함께 제시
      - 점추정 (point estimation) :
        미지인 모수의 참값으로 생각되는 단 하나의 값을 지정
      - 구간추정 (interval estimation) :
        미지인 모수의 참값이 포함되리라 예상되는 구간을 제시
    - 가설검정 (hypothesis testing)
      - 표본 자료의 정보를 통해 미지인 모수의 참값에 대한
        특정 가설이 적합한 지 적합하지 않은 지를 판별

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

확률과 통계 (Probability & Statistics)

가설검정 (hypothesis testing)

- 가설검정
  - 가설검정의 의미
    - 표본 자료의 정보를 통해 미지인 모수의 참값에 대한 특정 가설이 적합한 지 적합하지 않은 지를 판별하는 것
  - 통계적 가설(statistical hypothesis)
    - 모집단의 특성인 모수에 관한 주장이나 서술
  - 통계적 가설의 종류
    - 대립가설 (alternative hypothesis, H_1)
      - 입증하여 주장하고자 하는 가설
    - 귀무가설 (null hypothesis, H_0)
      - 대립가설의 반대 가설
      - 대립가설을 입증할 수 없을 때 무효화시키면서 받아들이는 가설

최용석 교수님(부산대) 통계학개론 중에서

Hypothesis Test

H_0 : null hypotheiss ⟹ signal: No GW

H_A: Alternative hypothesis ⟹ signal: True GW

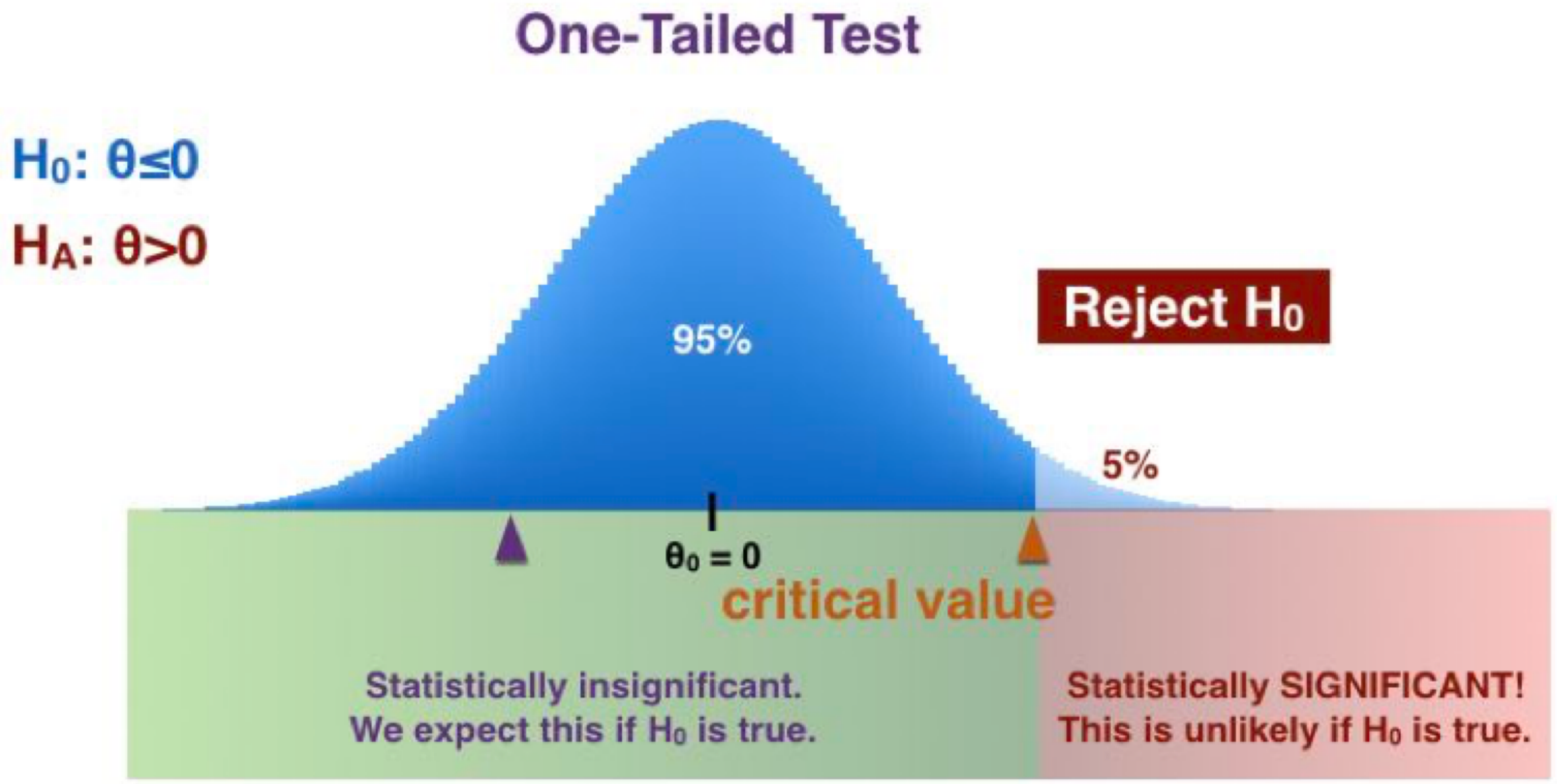


Image courtesy: https://prepnuggets.com/glossary/one-tailed-hypothesis-test/

x

Hypothesis Test

H_0 : null hypotheiss ⟹ signal: No GW

H_A: Alternative hypothesis ⟹ signal: True GW

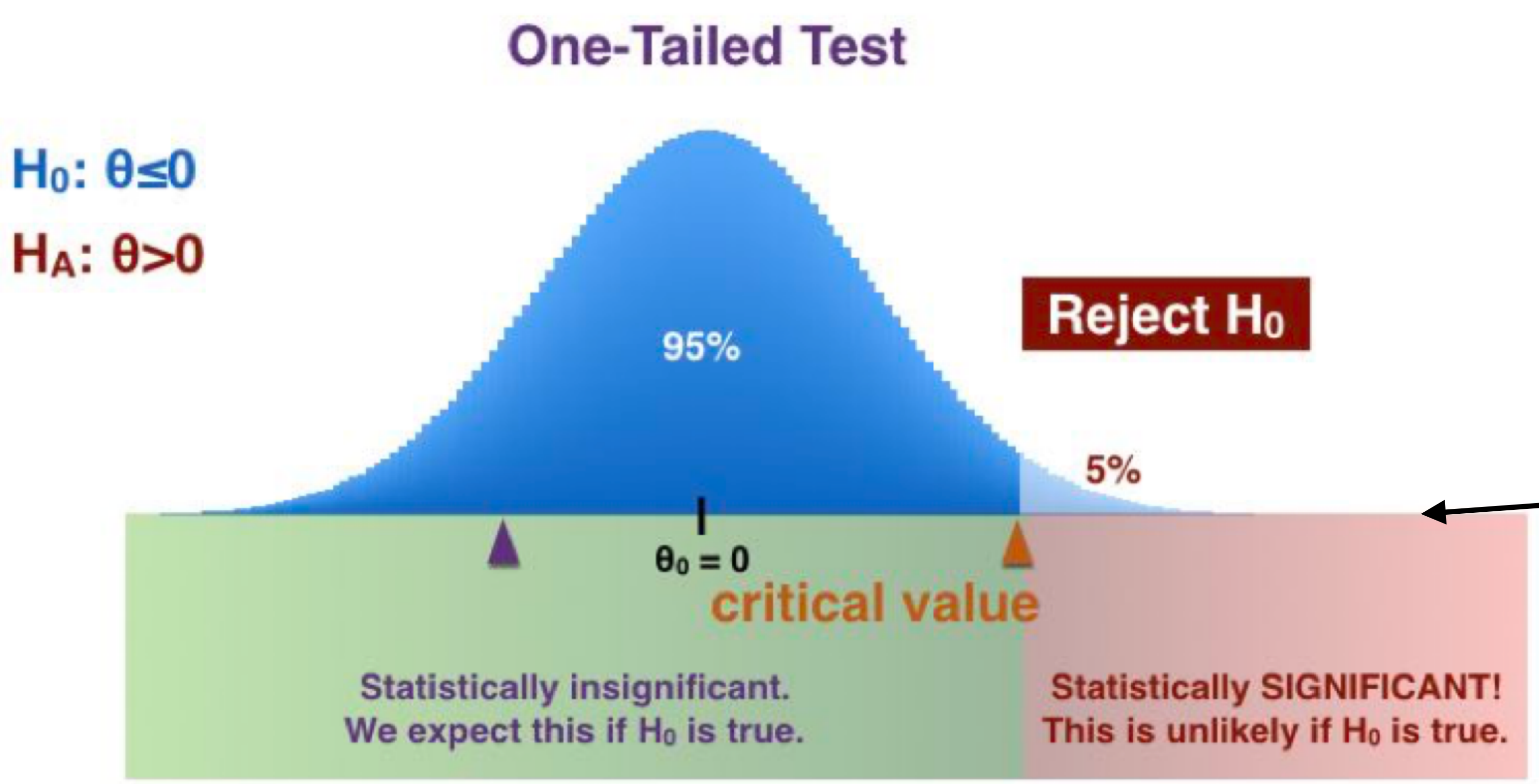


Image courtesy: https://prepnuggets.com/glossary/one-tailed-hypothesis-test/

x

h(t)?

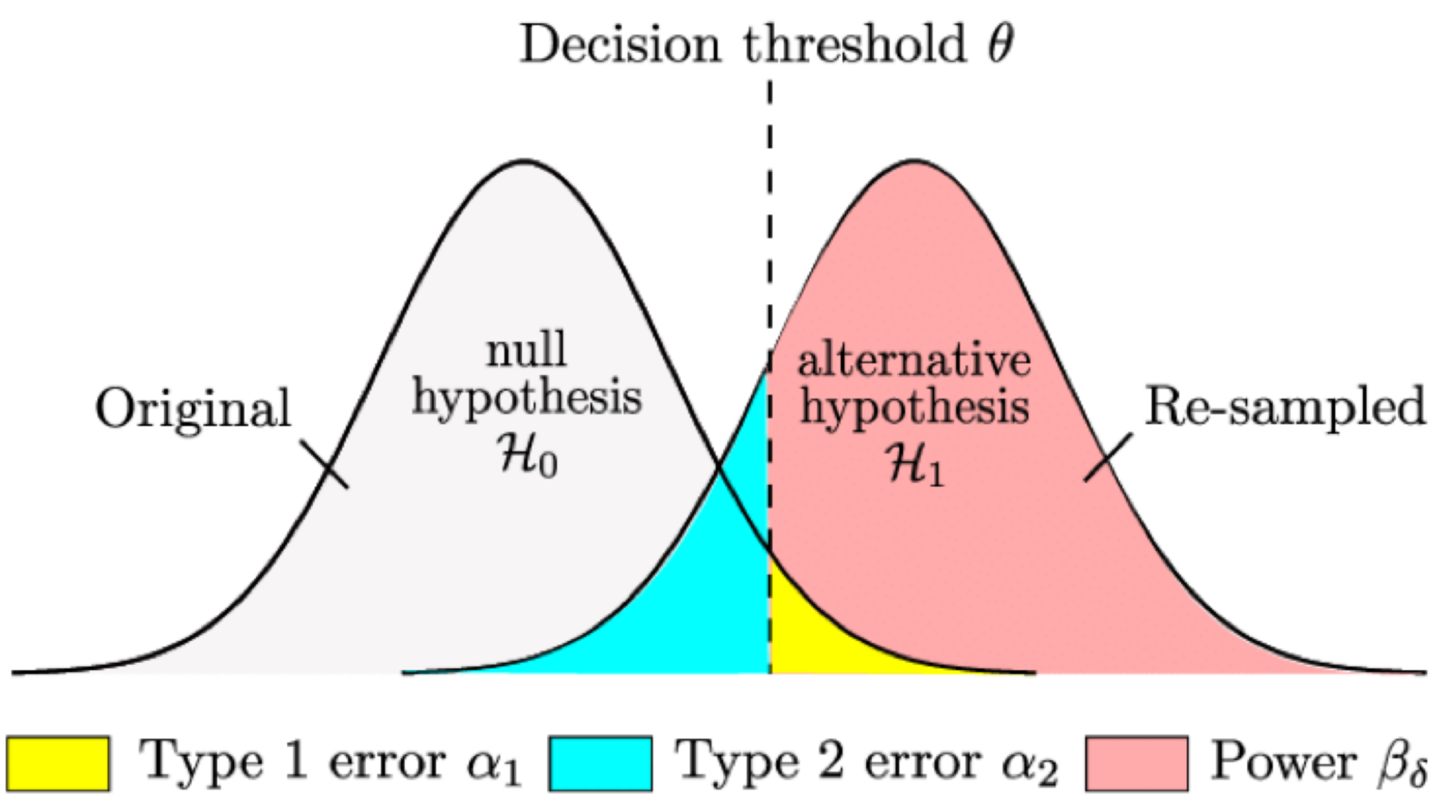
h_tilde(f)?

SNR!

Hypothesis Test

H$_0$: null hypotheiss ⟹ signal: No GW

H$_1$: Alternative hypothesis ⟹ signal: True GW



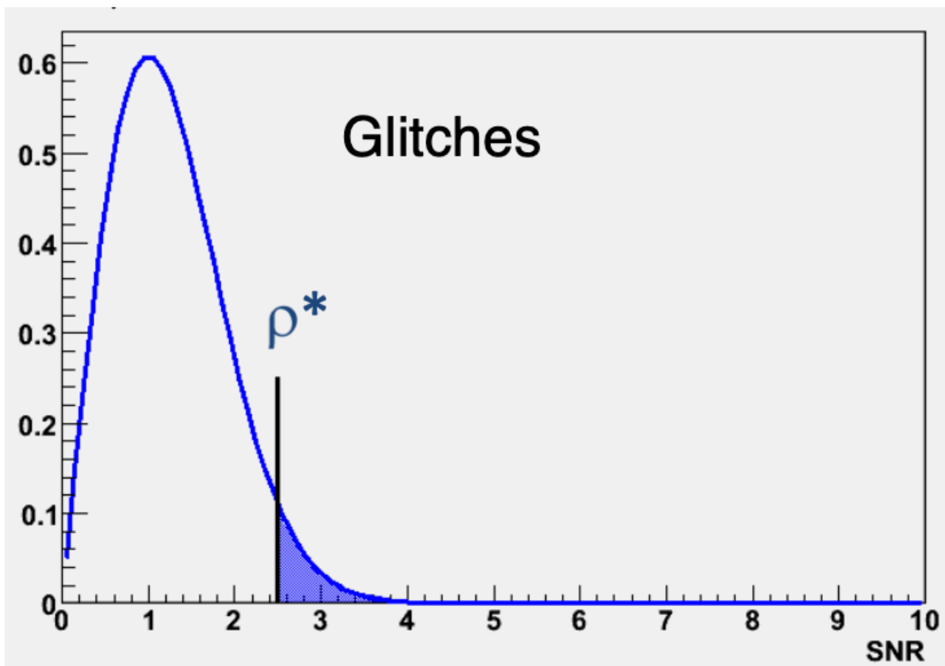
x

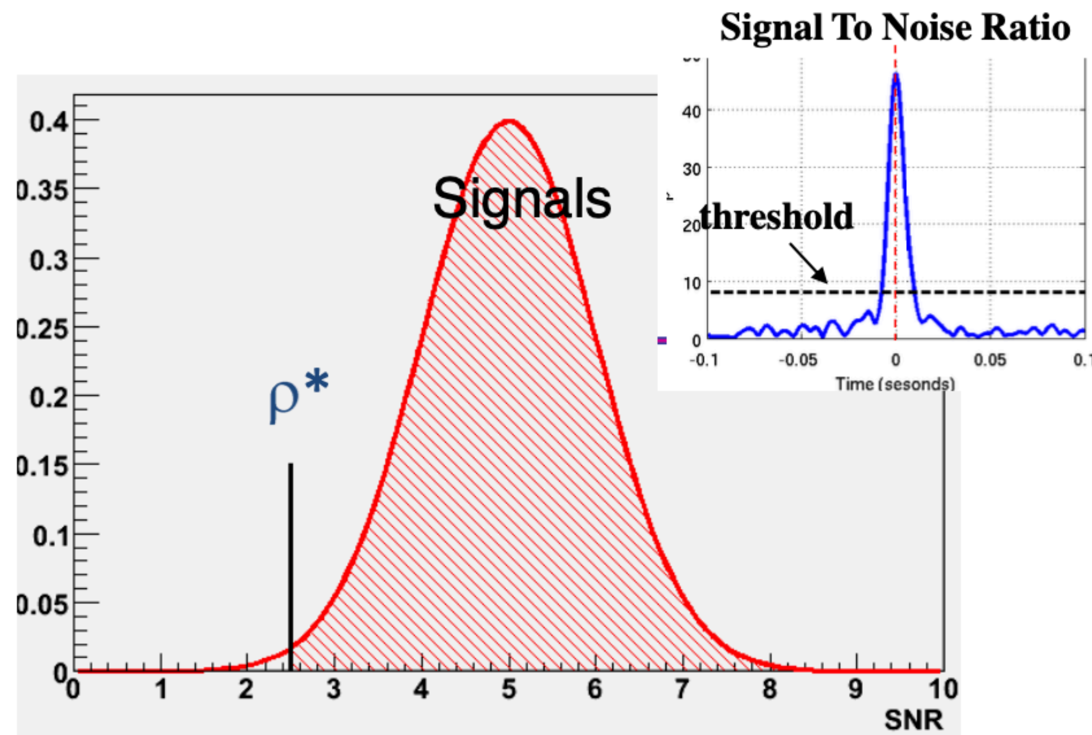
		Reality: True	Reality: False
Measured or Perceived	True	Correct ☺	**Type 1 error** False Positive
	False	**Type 2 error** False Negative	Correct ☺

Image courtesy: Le Nhan

Gravitational Waves

Under Gaussian noise, the matched filter provides optimal statistic, SNR





signal	True Positive	False Negative
noise	False Positive	True Negative

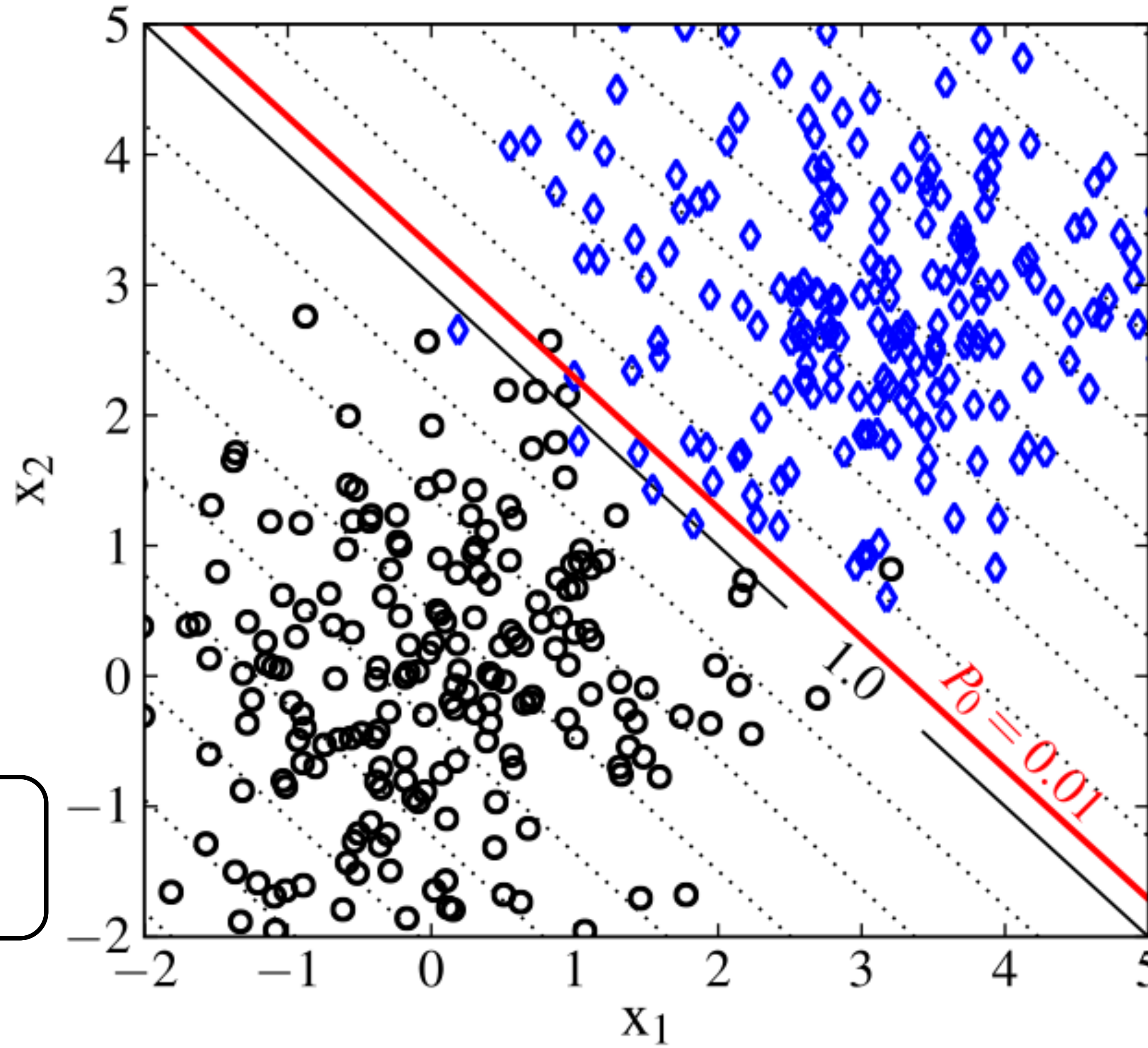
False Alarm Probability

$$P(\rho \geq \rho^* | n) = \int_{\rho^*}^{\infty} P(\rho|n) d\rho$$

오상훈박사님 2017년 여름학교 강의중에서

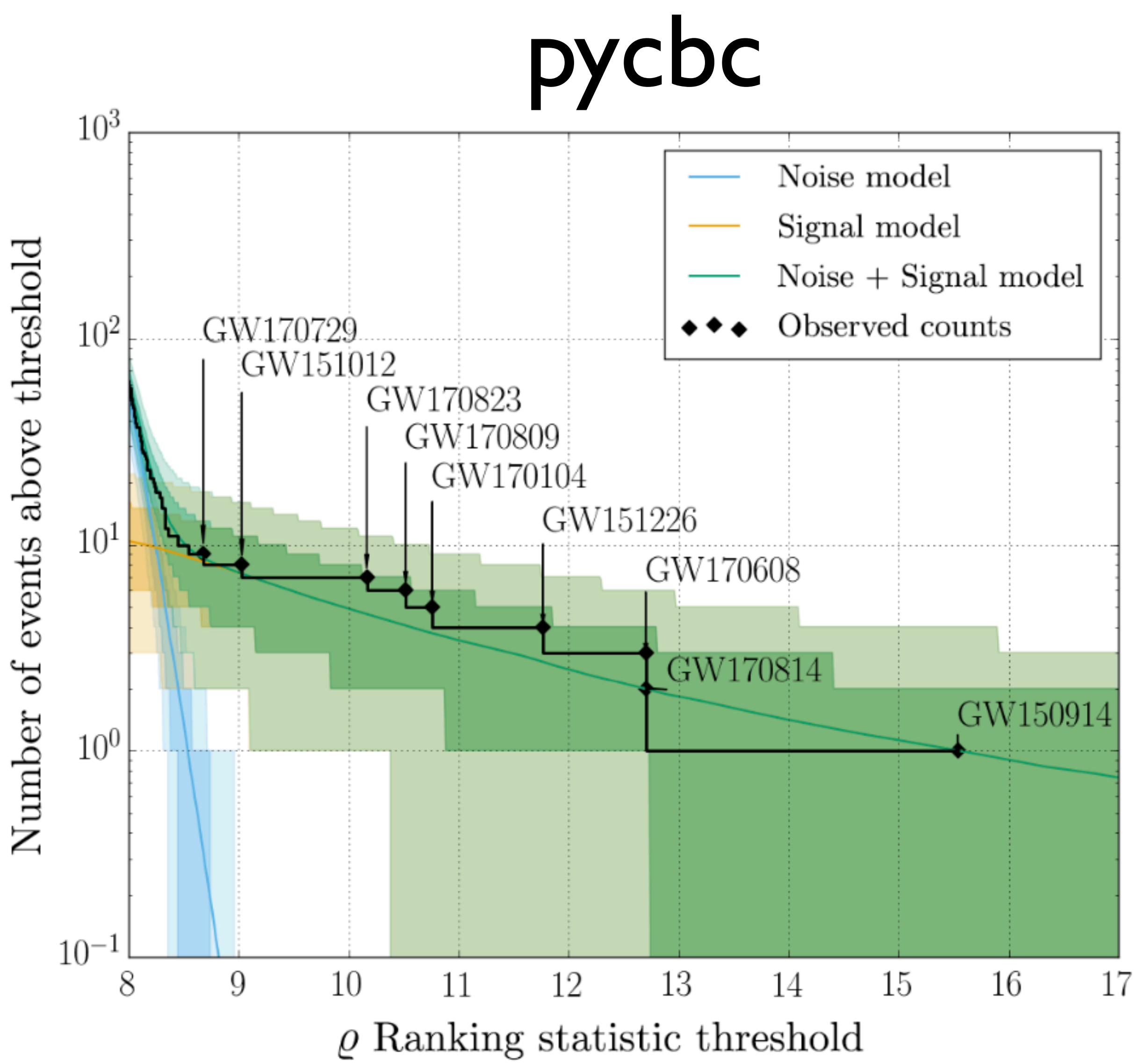
Classification problem

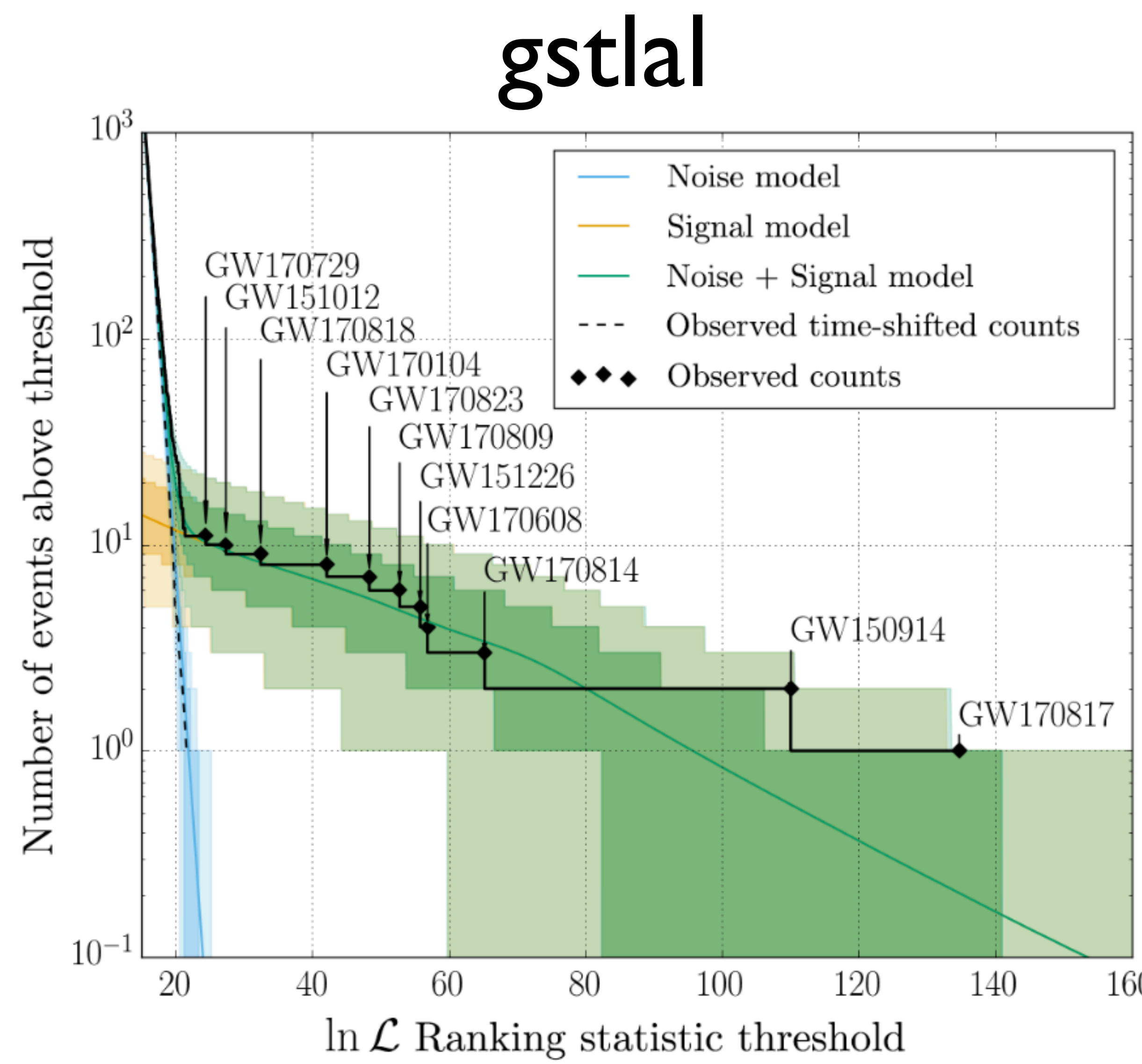
Class 1



Class 2

Signal Significance

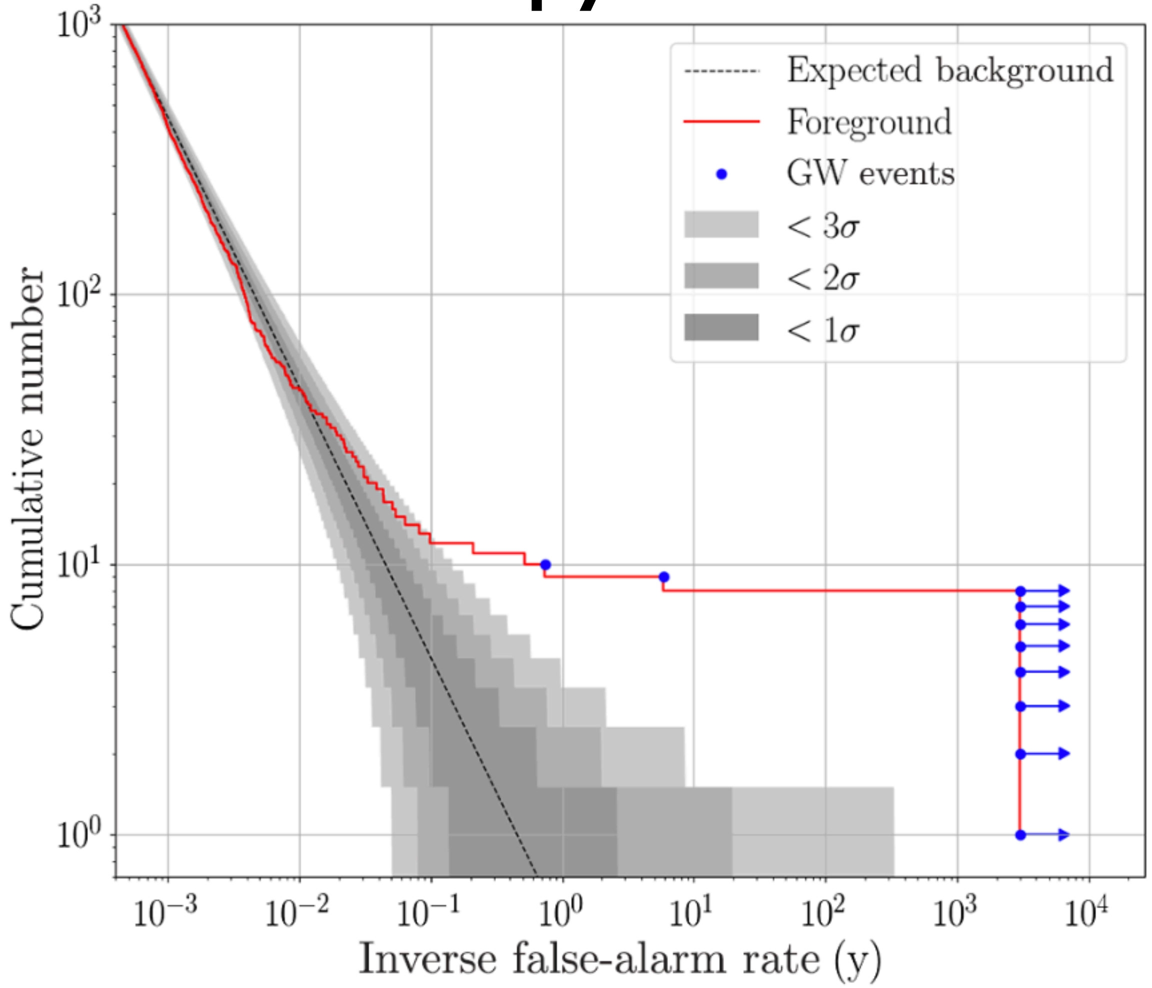




GWTC-1, PHYS. REV. X 9, 031040 (2019)

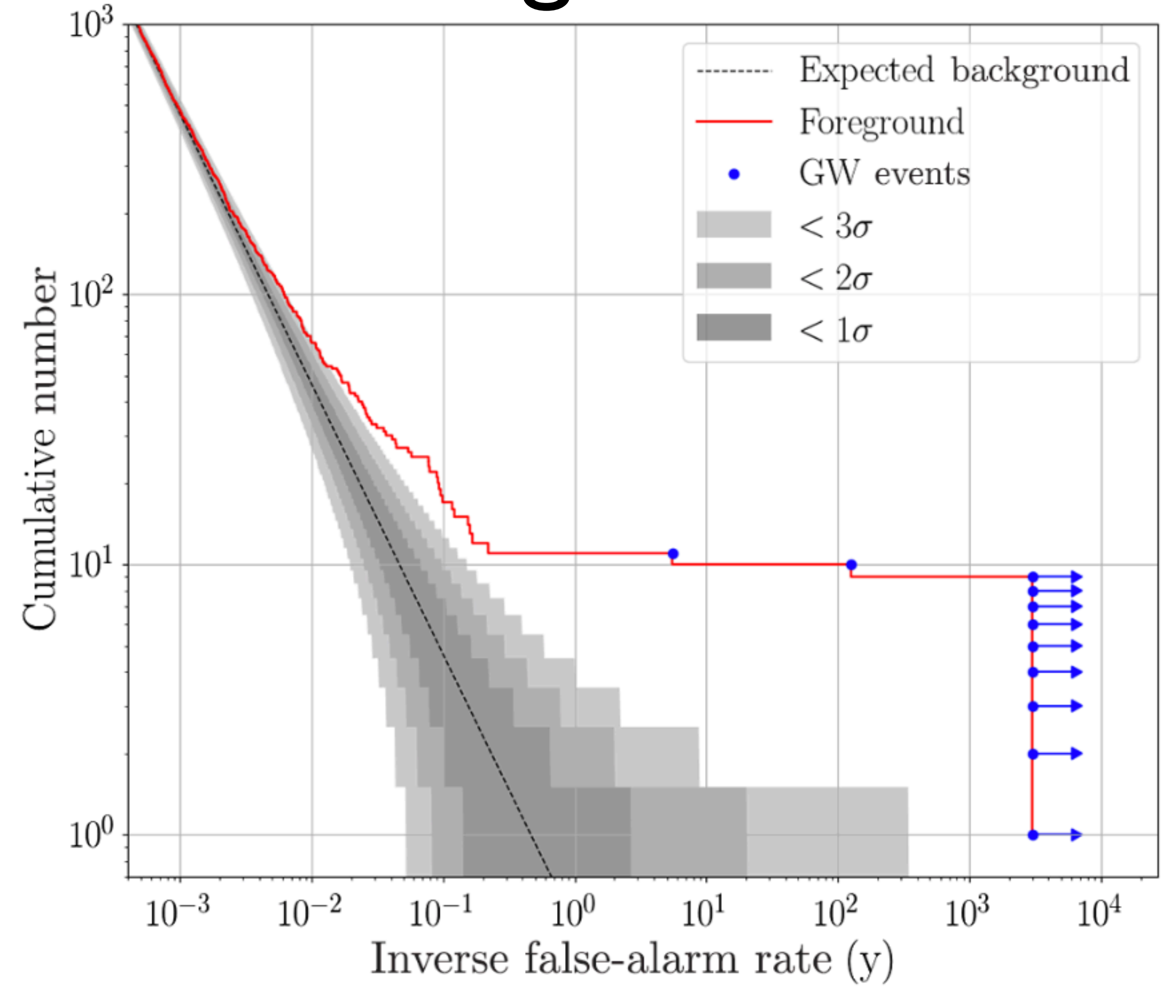
Signal Significance

pycbc



$$p = 1 - e^{-T/\mathrm{IFAR}}$$

gstlal



$$\mathrm{FAR} = \frac{NP(\log\mathcal{L}^* \geq \log\mathcal{L}|\mathrm{noise})}{T},$$

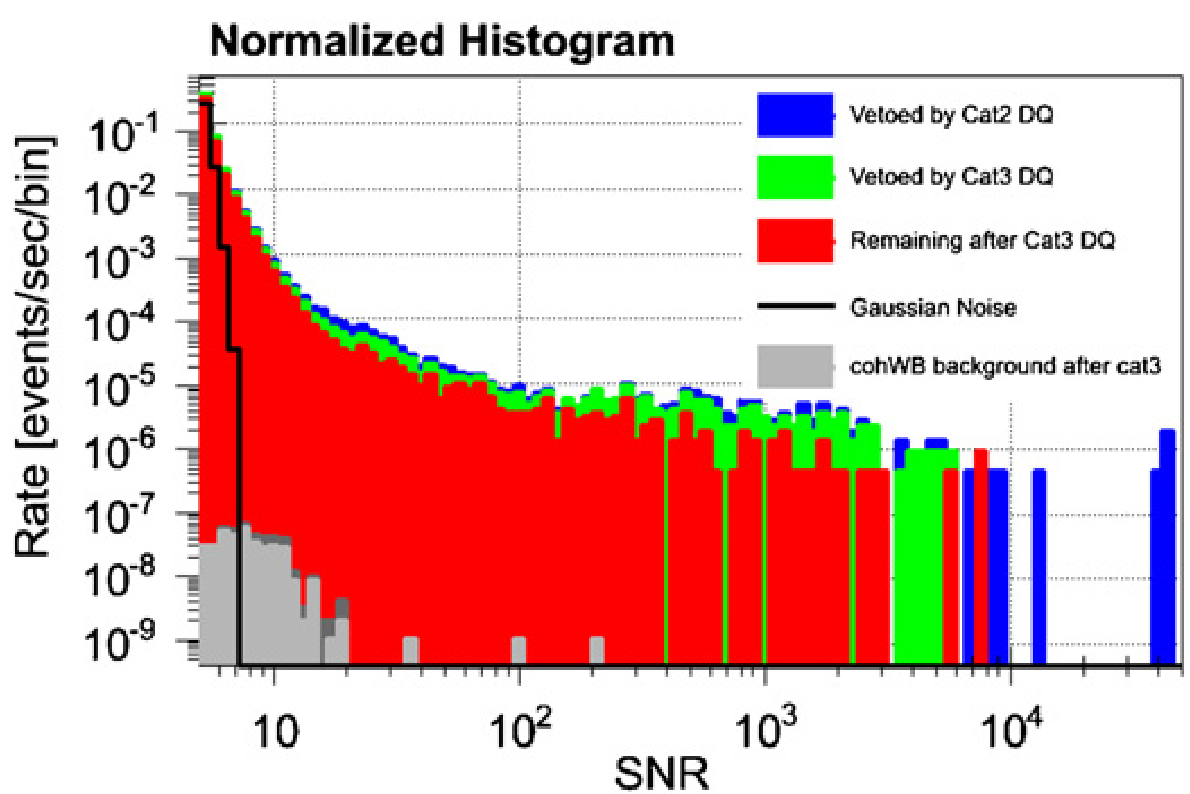
$$p = 1 - e^{-NP(\log\mathcal{L}^* \geq \log\mathcal{L}|\mathrm{noise})}.$$

GWTC-1, PHYS. REV. X 9, 031040 (2019)

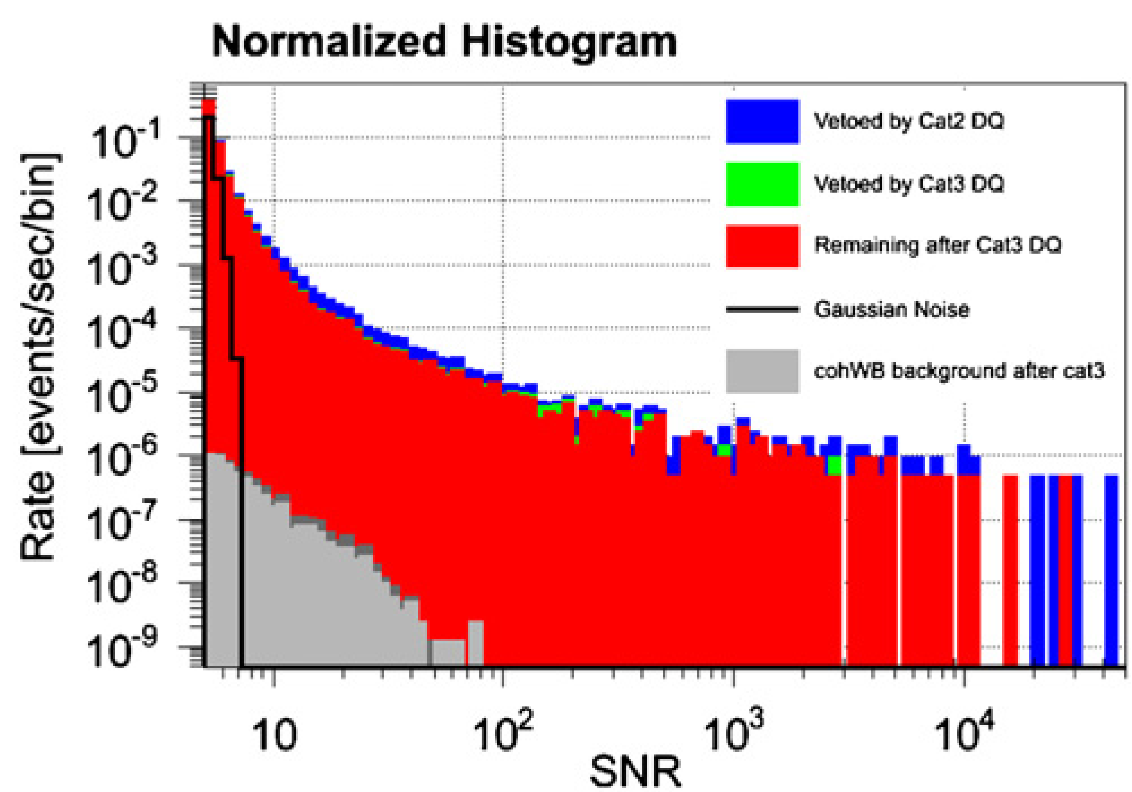
Glitches distribution

Noise distribution is non gaussian
and even non stationary

Hanford detector



Livingston detector



N.Christensen, CQG 27, 194010 (2010)

기타 확률 분포

1. 카이제곱 분포

- X^2 분포는 k개의 서로 독립적인 표준정규 확률변수를 각각 제곱한 다음 합해서 얻어지는 분포

카이제곱 분포는 감마 분포의 특수한 형태로 감마 분포에서 $k = \nu/2, \theta = 2$인 분포를 나타낸다.

$$f(x;\ k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}\, x^{k/2-1} e^{-x/2}\, \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$$

- 카이제곱 검정: 카이제곱 분포에 기초한 통계적 방법으로, 관찰된 빈도가 기대되는 빈도와 의미있게 다른지의 여부를 검정하기 위해 사용되는 검정방법

기타 확률 분포

1. 카이제곱 분포

- X^2 분포는 k가
  다음 합해서 얻

카이제곱 분포는 감마 분포의 특수
를 나타낸다.

$$f(x;\, k) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}$$

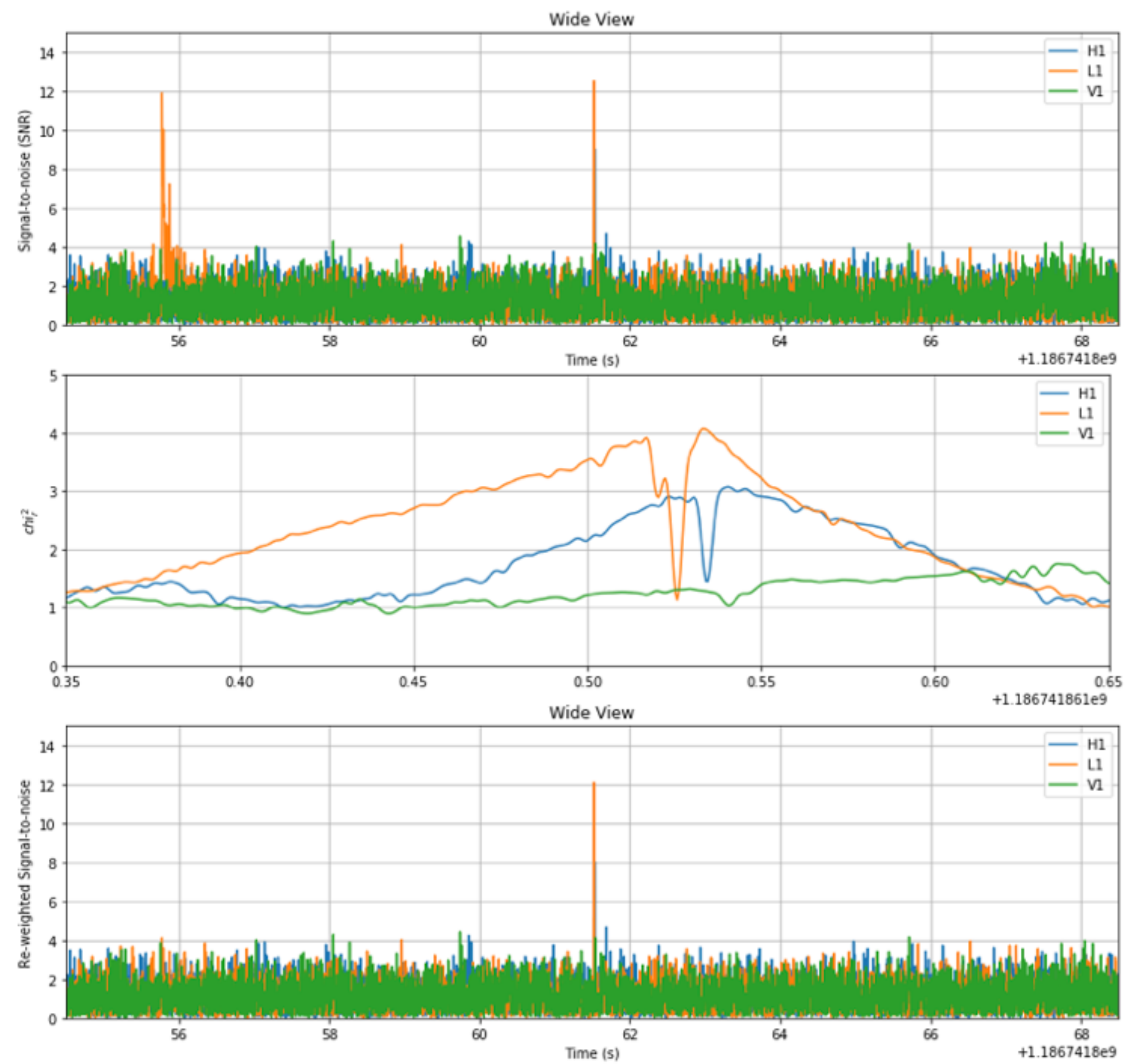
- 카이제곱 검정:
  가 기대되는 빈
  는 검정방법

<u>chisq and new SNR in ODW-2024 tutorial</u>

SNR

Chi^2_r

New SNR



기타 확률 분포

2. Student's t 분포

from Wikipedia

- 정규분포의 평균을 측정할때 사용

스튜던트 t 분포는 다음 확률변수의 분포로 정의

$$\frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

확률 밀도	$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$
누적 분포	$\frac{1}{2}+x\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\cdot\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{\nu+1}{2};\frac{3}{2};-\frac{x^2}{\nu}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$, 여기에서 ${}_2F_1$은 초기하함수

3. F 분포

- 두 확률변수 V1,V2가 각각 자유도 k1,k2 이고 서로 독립인 카이제곱 분포를 따른다고 할때 다음과 같은 확률변수 F는 자유도 (k1,k2)인 F-분포를 따른다.

$$F=\frac{V_1/k_1}{V_2/k_2}\sim F(k_1,k_2)$$

확률 밀도	$\frac{\sqrt{\frac{(d_1\,x)^{d_1}\,d_2^{d_2}}{(d_1\,x+d_2)^{d_1+d_2}}}}{x\,\mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2},\frac{d_2}{2}\right)}$
누적 분포	$I_{\frac{d_1 x}{d_1 x+d_2}}(d_1/2,d_2/2)$

기타 확률 분포

4. 포아송 분포

from Wikipedia

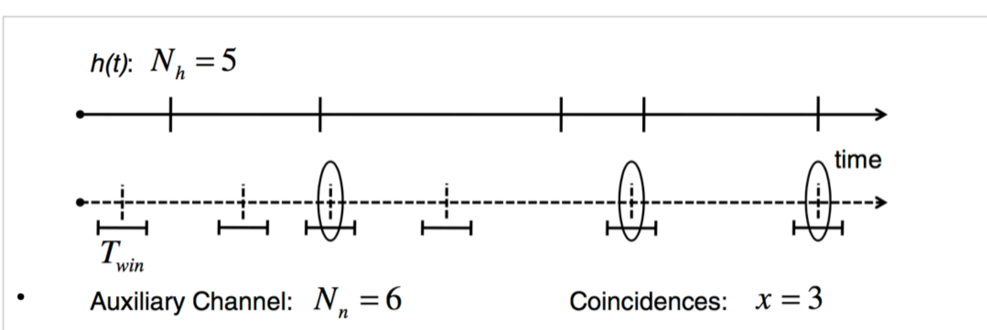
정의 [편집]

정해진 시간 안에 어떤 사건이 일어날 횟수에 대한 기댓값을 λ라고 했을 때, 그 사건이 k회 일어날 확률은 다음과 같다.

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

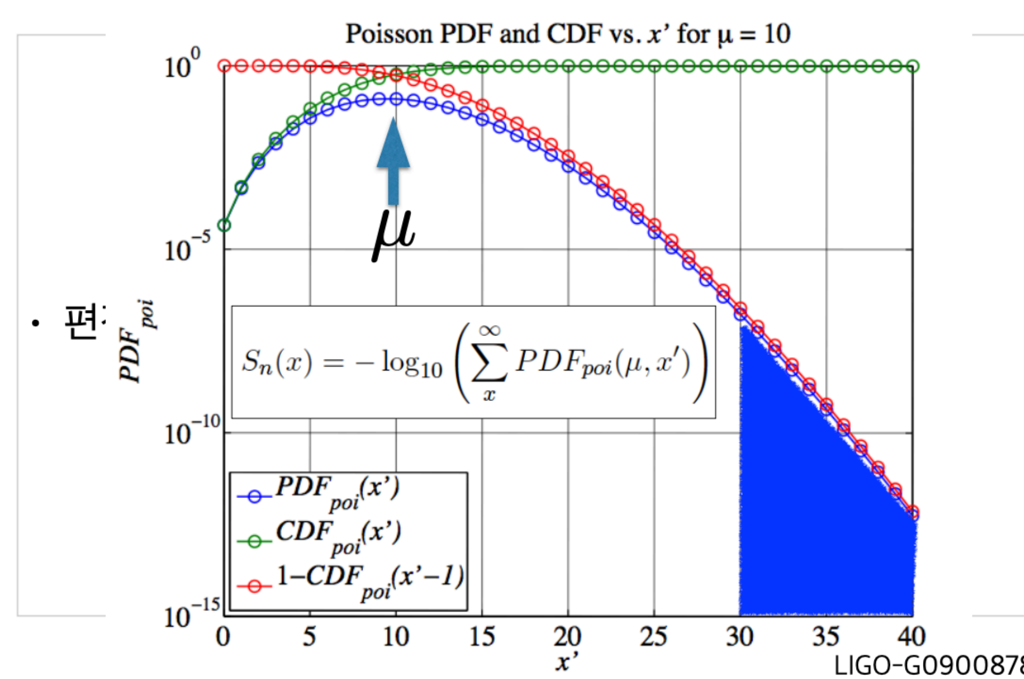
여기서 e는 자연상수이다.

Counting Experiment



Poisson Statistics

Statistical Significance



상관성 분석 (Correlation Analysis)

from Wikipedia

Pearson's correlation coefficient

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

where

- cov is the covariance
- σ_X is the standard deviation of X
- σ_Y is the standard deviation of Y.

The formula for $\operatorname{cov}(X,Y)$ can be expressed in terms of mean and expectation. Since[10]

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)],$$

the formula for ρ can also be written as

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

where

- σ_Y and σ_X are defined as above
- μ_X is the mean of X
- μ_Y is the mean of Y
- $\mathbb{E}$ is the expectation.

Basic Illustration of Matched Filtering

cross-correlation

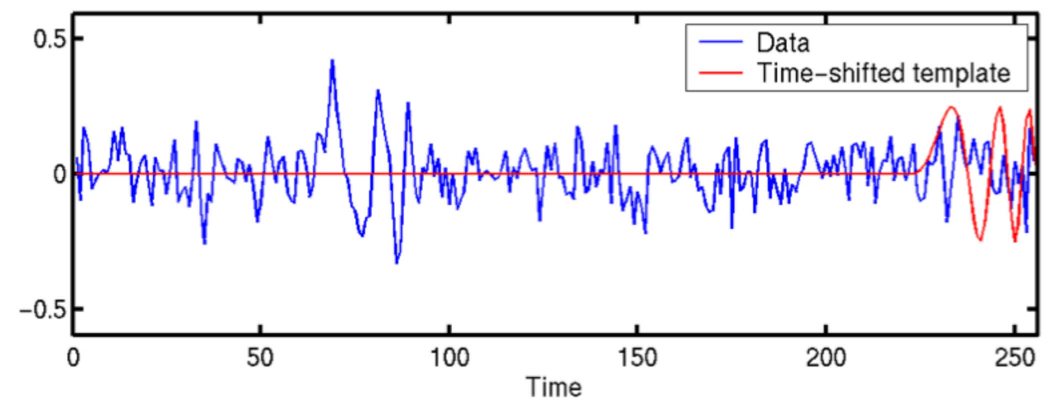
$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') h(t - t')$$

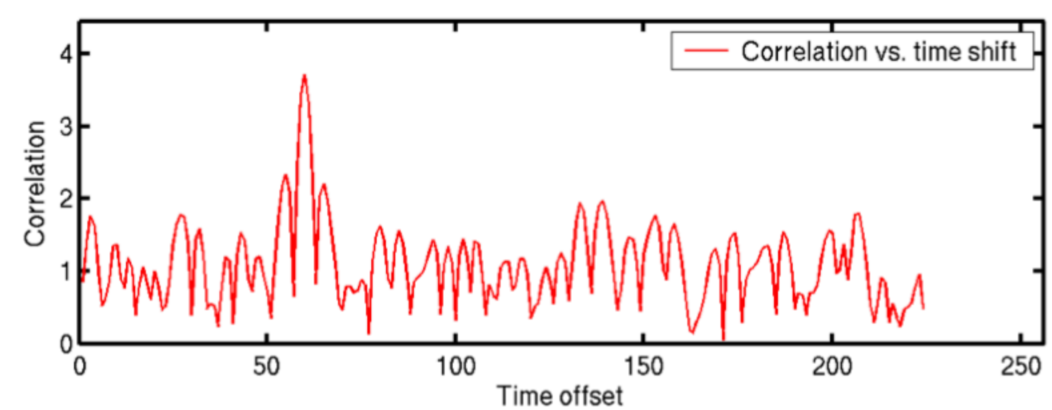
t	time offset
s(t)	data
h(t)	template

From convolution theorem

$$C(t) = 4 \int_0^{\infty} \tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f) e^{2\pi i f t} df$$

Simply use inverse FFT

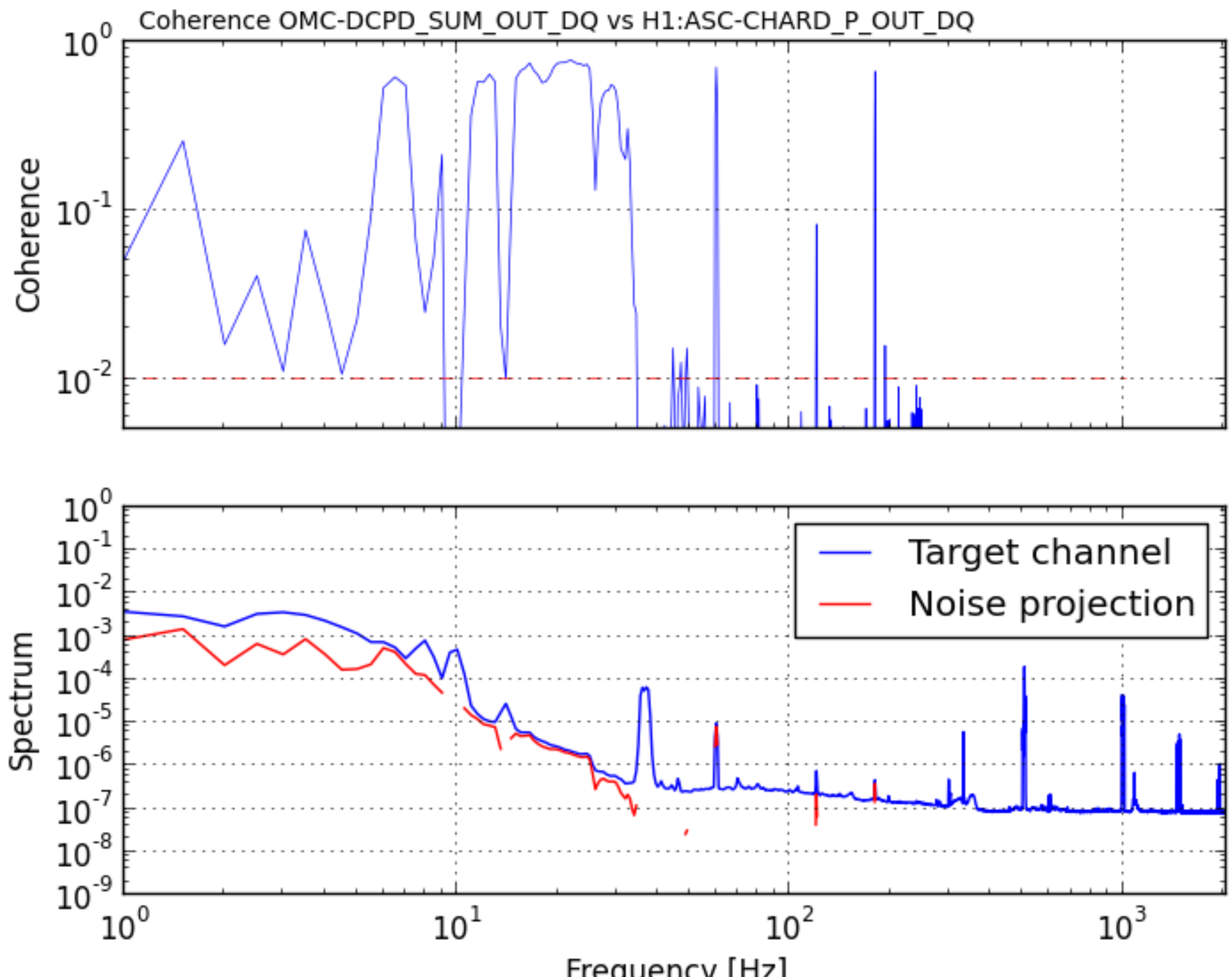




from P. Shawhan's slide

Coherence

Coherence


Coherence OMC-DCPD_SUM_OUT_DQ vs H1:ASC-CHARD_P_OUT_DQ
Coherence
Spectrum
Target channel
Noise projection
Frequency [Hz]

Bayesian Inference

Bayes' theorem

The likelihood could be the function of errors

Posterior $$p(\theta|d) = \frac{p(d|\theta)}{p(d)} \cdot p(\theta)$$

Prior choices can influence results

$$= \frac{p(d|\theta)}{\int p(d|\theta)p(\theta)d\theta} \cdot p(\theta)$$

The evidence is unimportant for parameter estimation (but not model selection !)

$$p(\theta|d) \sim p(d|\theta)p(\theta)$$

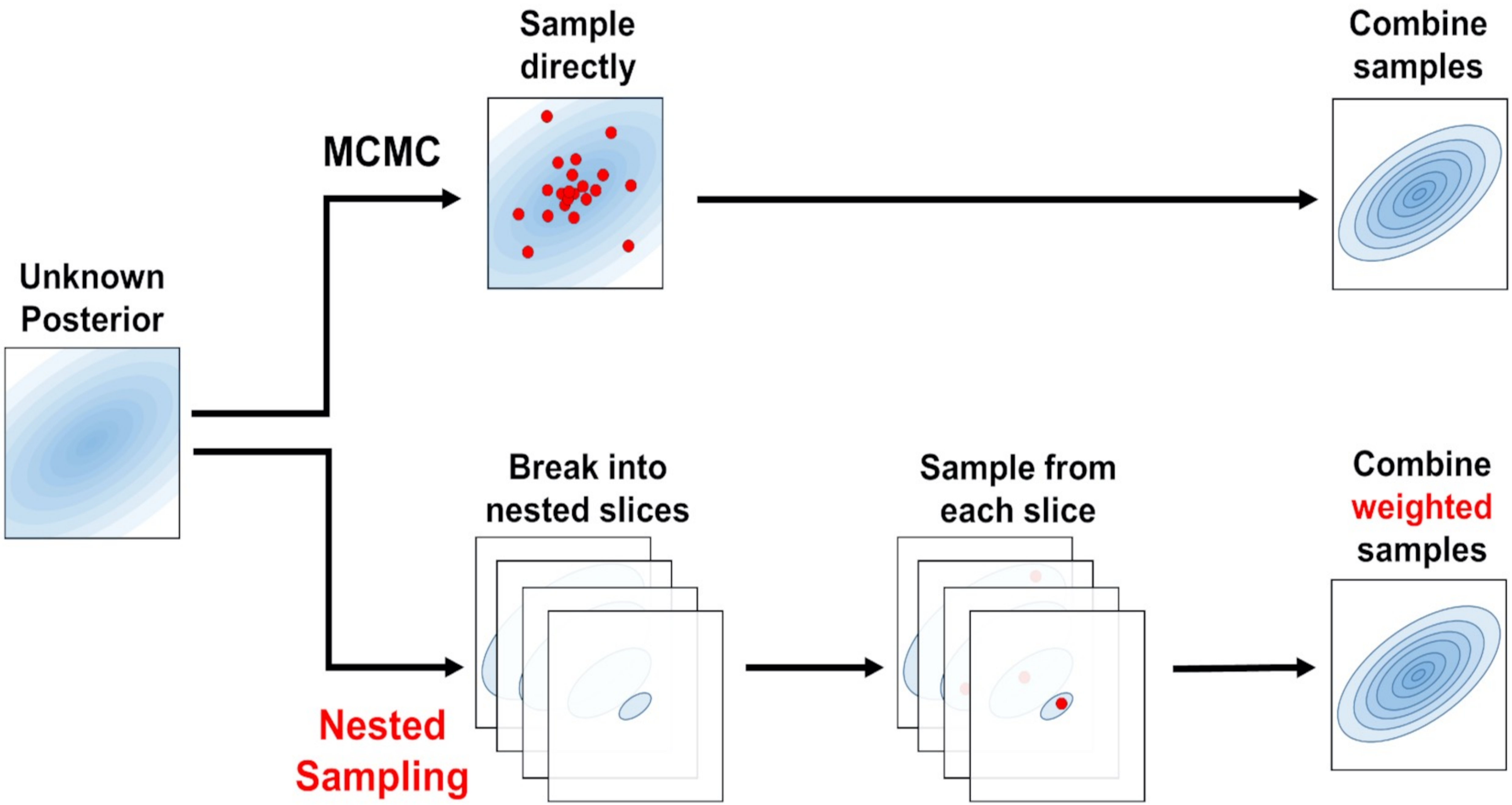
Prior, p(θ) : the distribution of the parameter(s) before any data is observed

Likelihood, p(d|θ) : the distribution of the observed data conditional on its parameters

Posterior, p(θ|d): the distribution of the parameter(s) after taking into account the observed data

Model evidence, p(d):the distribution of the observed data marginalized over the parameter(s)

Figure 1. A schematic representation of the different approaches MCMC methods and nested sampling methods take to ...



Mon Not R Astron Soc, Volume 493, Issue 3, April 2020, Pages 3132–3158, https://doi.org/10.1093/mnras/staa278

Example: inference for NS EoS

```python
priors = dict(
    logp1=bilby.core.prior.Uniform(34, 34.9, "logp1"),
    gamma1=bilby.core.prior.Uniform(4.0, 6.0, "gamma1"),
    gamma2=bilby.core.prior.Uniform(2.0, 4.0, "gamma2"),
    gamma3=bilby.core.prior.Uniform(1.0, 4.0, "gamma3"),
)
```

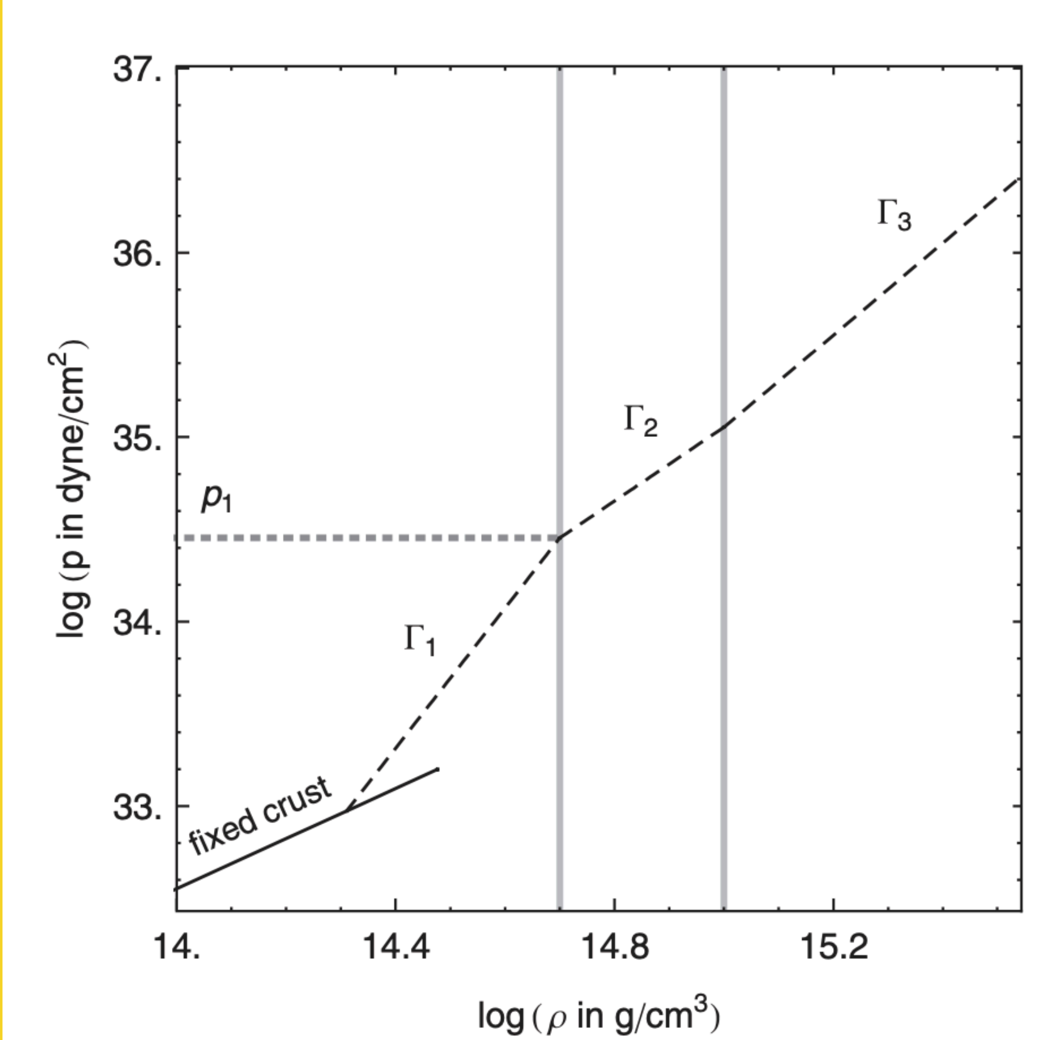
```python
# for all eos in PRD 79, 124032
# logp1, [33.943,34.858]
# gamma1, [2.013,4.070]
# gamma2, [1.267,3.791]
# gamam3, [1.325,3.660]

# M_max >= 2.0 Msun, eos  in PRD 79, 124032
# logp1, [34.031,34.858]
# gamma1, [2.519,4.070]
# gamma2, [2.246,3.791]
# gamam3, [1.325,3.660]

# M_max >= 2.0 Msun, eos  in PRD 79, 124032
# w/o ALF2, gamma1=4.070, residual=0.043:larger than others
# logp1, [34.031,34.858]
# gamma1, [2.519,3.514]
# gamma2, [2.246,3.791]
# gamam3, [1.325,3.660]
```

Piece-wise polytope: 4 parameters

$$\epsilon(\rho) = (1 + a_i)\rho + \frac{K_i}{\Gamma_i - 1}\rho^{\Gamma_i},$$



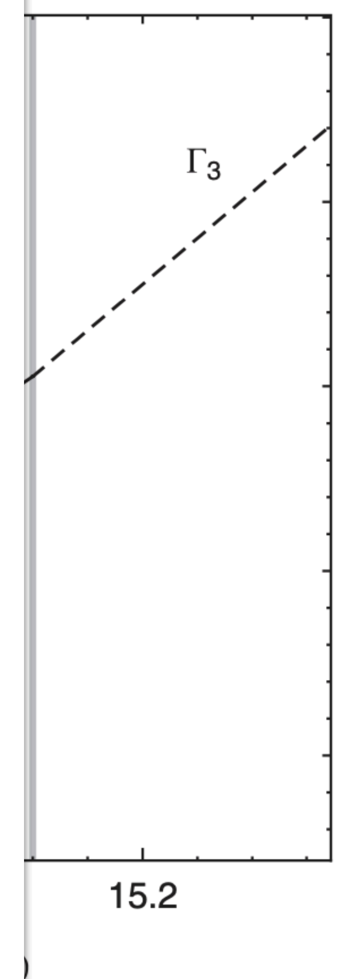
Read et al. PRD 79, 124032 (2009)

Example: inference for NS EoS

```
priors = dict(
    logp1=bilby.core.prior.Uniform(34, 34.9, "logp1"),
    gamma1=bilby.core.prior.Uniform(4.0, 6.0, "gamma1"),
    gamma2=bilby.core.prior.Uniform(2.0, 4.0, "gamma2"),
    gamma3=bilby.core.prior.Uniform(1.0, 4.0, "gamma3"),
)
```

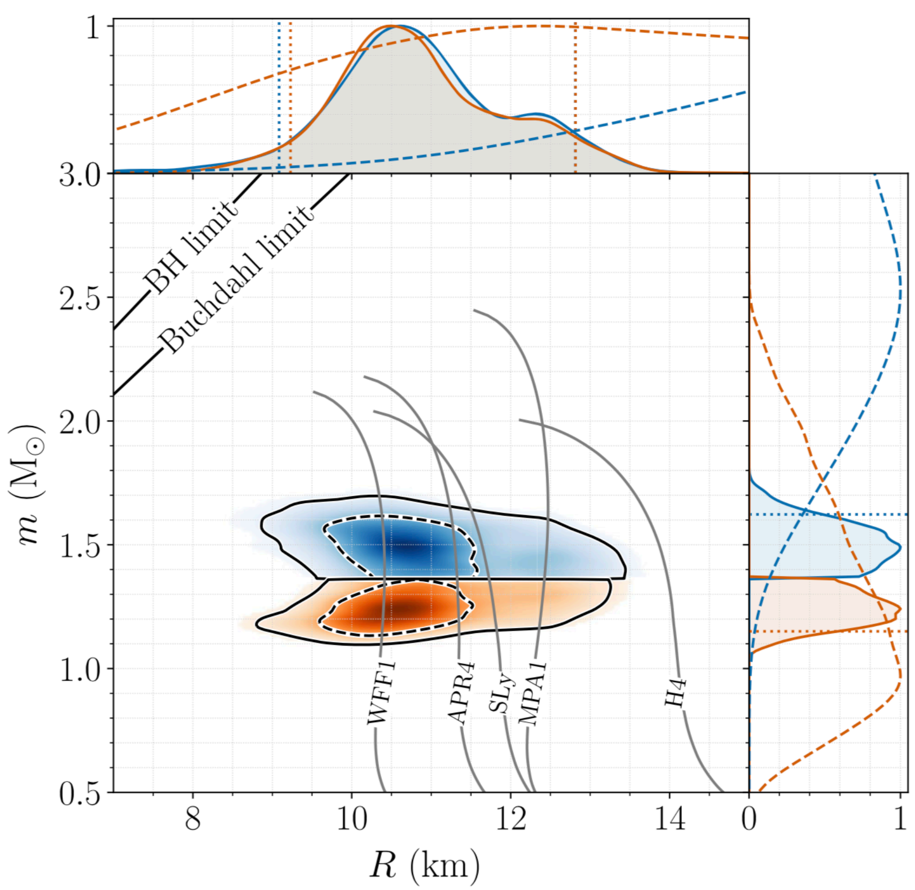
Piece-wise polytope: 4 parameters

$$\epsilon(\rho) = (1 + a_i)\rho + \frac{K_i}{\Gamma_i - 1}\rho^{\Gamma_i},$$



032 (2009)

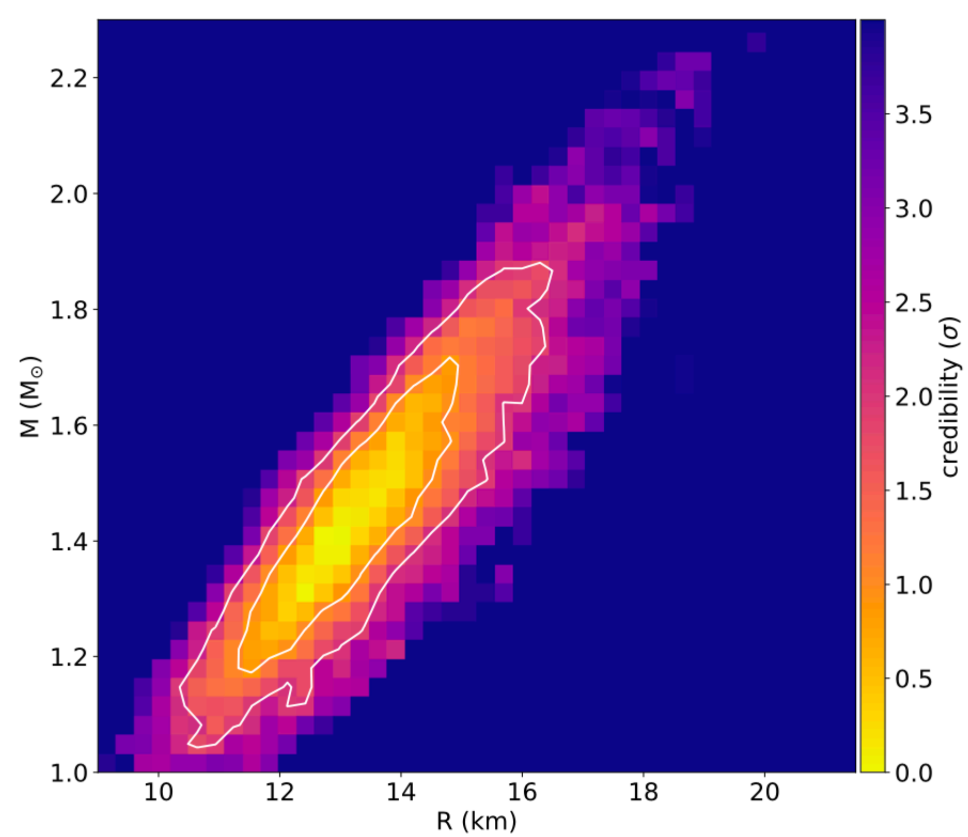
GW170817 (EoS-insensitive)



Abbott et al. (LSC and Virgo), PhysRevLett.121.161101

PSR J0030+0451

The Astrophysical Journal Letters, 887:L24 (28pp), 2019 December 10

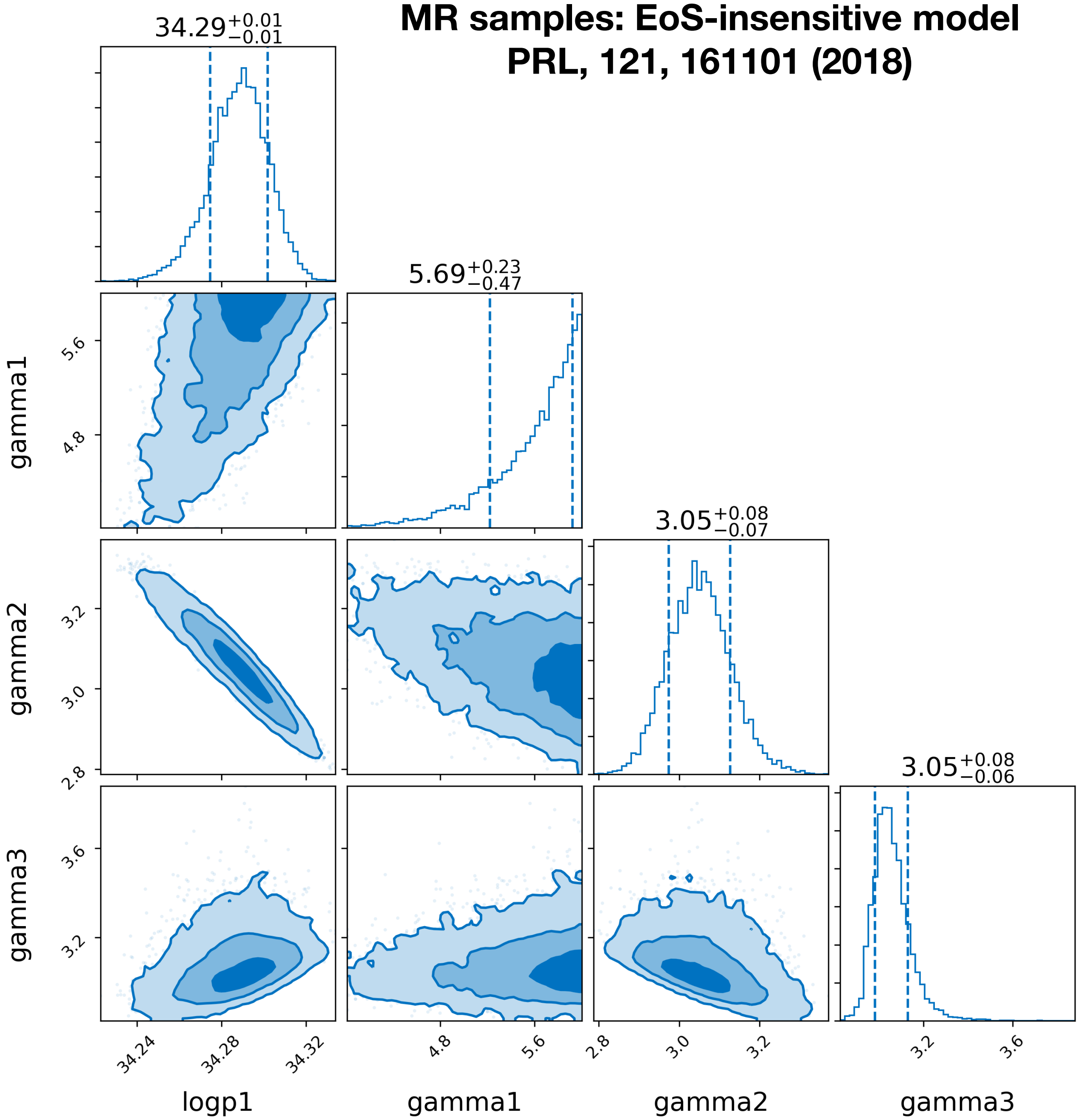


Posteriors w/ Piece-wise Polytropic EoSs

Reference for Piece-wise Polytropic EoSs : Read et al. PRD 79, 124032 (2009)

GW170817

MR samples: EoS-insensitive model
PRL, 121, 161101 (2018)



PSR J0030+0451

MR samples: 2 spot model
Miller et al., ApJL, 887, L24 (2019)